Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Quadratische Pyramiden

Aufgabe: Die quadratische Grundfläche ABCD einer Pyramide besitzt die Ecken A(2|-2|0), B(2|2|0), C(-2|2|0), D(-2|-2|0), die Pyramidenspitze lautet S(0|0|4). Bestimme den Punkt P, der von allen Ecken der Pyramide denselben Abstand hat.

Lösung: I. Die Pyramide ABCDS ist quadratisch und regelmäßig, so dass der gesuchte Punkt P auf der x_3-Achse des x_1-x_2-x_3-Koordinatensystems als Symmetrieachse der Pyramide liegen muss. Es ist damit: P(0|0|t).

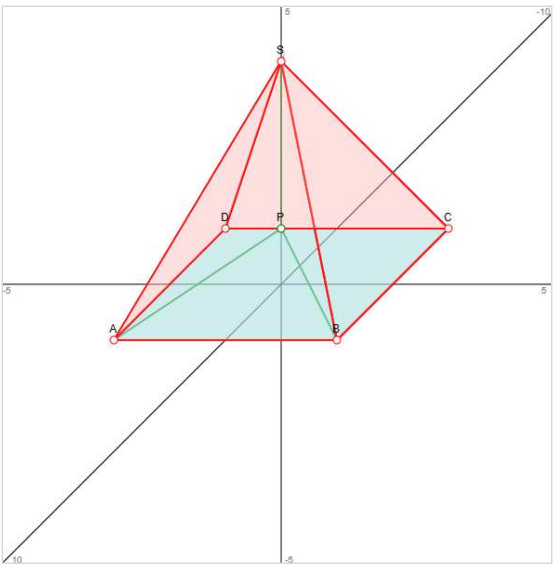
II. Wegen der Regelmäßigkeit der Pyramide ist: $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{BP}\right| = \left|\overrightarrow{CP}\right| = \left|\overrightarrow{DP}\right|$, so dass also die Gleichung der Abstände $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{SP}\right|$ ausgewertet, d.h. nach der Unbekannten t umgestellt werden muss. Es ergibt sich mit: $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t-4 \end{pmatrix}$:

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{SP}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t-4 \end{pmatrix}\right| \Leftrightarrow \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + t^2} = \sqrt{(t-4)^2} \Leftrightarrow \sqrt{8+t^2} = \sqrt{(t-4)^2} \underset{Quadrieren}{\Leftrightarrow}$$

$$8 + t^2 = (t-4)^2 \Leftrightarrow 8 + t^2 = t^2 - 8t + 16 \Leftrightarrow 8 = -8t + 16 \Leftrightarrow -8 = -8t \Leftrightarrow t = 1$$

und folglich (wegen t = 1) als gesuchter Punkt P(0|0|1). Der (gleiche) Abstand dieses Punktes zu allen Pyramidenecken beträgt dann:

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{BP}\right| = \left|\overrightarrow{CP}\right| = \left|\overrightarrow{DP}\right| = \left|\overrightarrow{SP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-4 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ LE.}$$



(LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 06.2023 / Aufgabe 1882