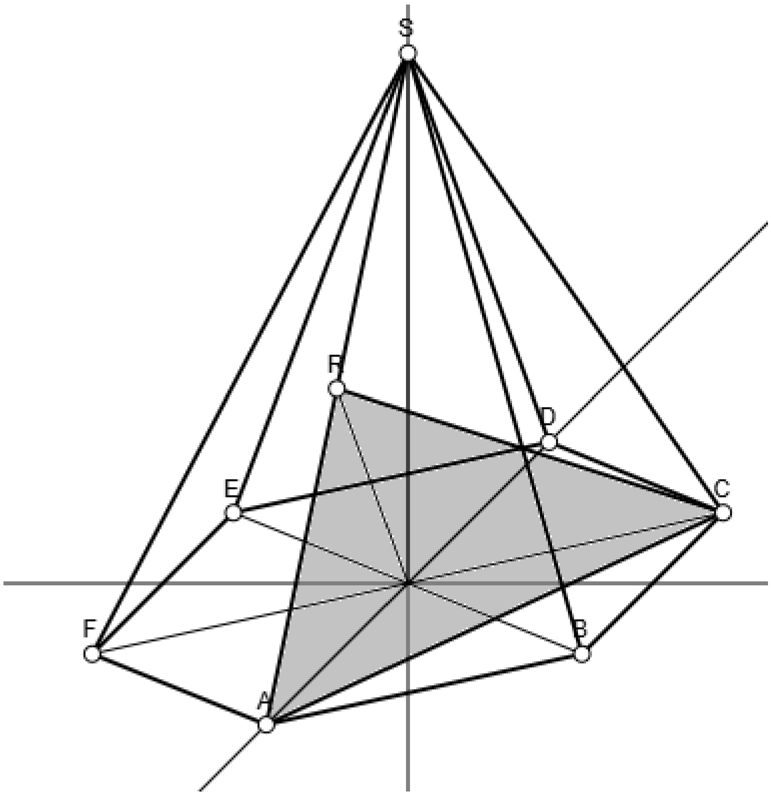
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Sechseckpyramiden

Aufgabe: Die regelmäßige Sechseckpyramide hat als Grundfläche ABCDEF mit den Ecken: A(8|0|0), B(4|4√3|0), C(-4|4√3|0), D(-8|0|0), E(-4|-4√3|0), F(4|-4√3|0) sowie die Spitze S(0|0|15). Der Punkt R ist die Mitte der Pyramidenseitenkante.



Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔACR.

1. Lösung (analytische Geometrie): I. R ist die Mitte der Seitenkante $\overline{AS}$, daher lässt sich R berechnen mit:

$$\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OS}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$$ -> R(4|0|7,5).

II. Wir berechnen die Vektoren $\overrightarrow{AR}$ und $\overrightarrow{AC}$ und damit zwei Seiten des Dreiecks ΔACR:

$$\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

III. Wir berechnen das <u>Kreuzprodukt</u> $\vec{AR} \times \vec{AC}$:

$$\vec{AR} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 7{,}5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -12 \\ 4\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 7{,}5 \cdot 4\sqrt{3} \\ 7{,}5 \cdot (-12) - 0 \\ -4 \cdot 4\sqrt{3} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30\sqrt{3} \\ -90 \\ -16\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Der gesuchte <u>Flächeninhalt</u> des Dreiecks ΔACR errechnet sich als halber Betrag des Kreuzprodukts $\vec{AR} \times \vec{AC}$:

$$A_{\Delta ACR} = \frac{1}{2}\left| \begin{pmatrix} -30\sqrt{3} \\ -90 \\ -16\sqrt{3} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-30\sqrt{3})^2 + (-90)^2 + (-16\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{900 \cdot 3 + 8100 + 256 \cdot 3} =$$

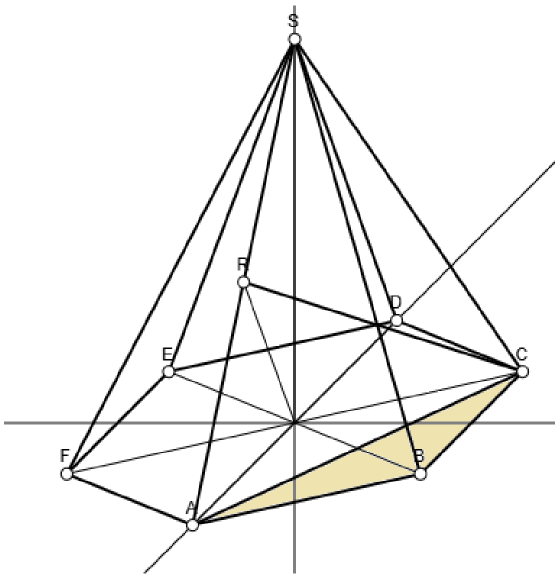
$$\frac{1}{2}\sqrt{2700 + 8100 + 768} = \frac{1}{2}\sqrt{11568} = \sqrt{2892} = 2\sqrt{723} \approx 53{,}78 \text{ FE.}$$

2. Lösung (elementare Geometrie): I. Nach Aufgabenstellung liegt eine regelmäßige Sechseckpyramide mit Grundkante a = 8 LE (z.B. wegen Eckpunkt A(8|0|0) und der sechs gleichseitigen Dreiecke der Grundfläche ABCDEF) und Höhe h = 15 LE (wegen der Pyramidenspitze S(0|0|15)) vor. Die Seitenkante s der Pyramide errechnet sich nach dem Satz des Pythagoras aus Pyramidengrundkante a und -höhe h gemäß:

$$s^2 = a^2 + h^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \Rightarrow s = \sqrt{289} = 17 \text{ LE.}$$

Daher ist mit R als Mittelpunkt der Seitenkante $\overline{AR} = \frac{s}{2} = \frac{17}{2}$ = 8,5 LE eine <u>Seite</u> des Dreiecks ΔACR.

II. Zur Ermittlung der Seite $\overline{AC}$ des Dreiecks ΔACR betrachten wir die Grundfläche ABCDEF als regelmäßiges Sechseck.

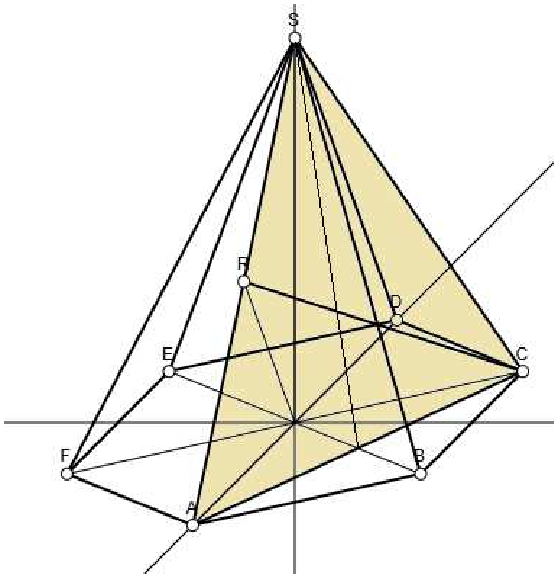


Das Teildreieck ΔABC der Grundfläche ABCDEF ist gleichschenklig mit $\overline{AB} = \overline{BC}$ = 8 LE und dem Sechseckaußenwinkel β = 180° – 60° = 120°. Die von der Ecke B ausgehende Höhe h_B halbiert das gleichschenklige Dreieck ΔABC, es entstehen zwei rechtwinklige Dreiecke etwa mit $\overline{AB}$ = 8 LE als Hypotenuse, h_B und $\overline{AC}$ /2 als Katheten sowie dem Winkel β/2 = 60°. Es ist somit:

$$\sin 60° = \frac{\frac{\overline{AC}}{2}}{8} = \frac{\overline{AC}}{16} \Rightarrow \overline{AC} = 16 \cdot \sin 60° = 16 \cdot 0{,}866 = 13{,}86 \text{ LE},$$

womit die zweite <u>Seite</u> im Dreieck ΔACR berechnet wurde.

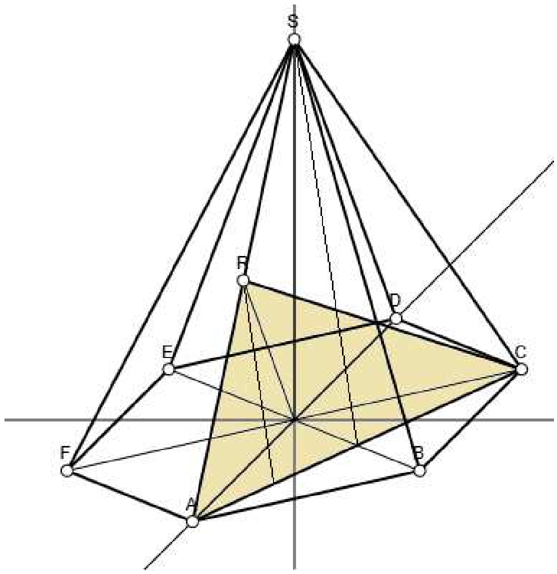
III. Zur Bestimmung des Flächeninhalts des Dreiecks ΔACR fehlt noch die vom Punkt R ausgehende Höhe h_R auf die Seite $\overline{AC}$. Dazu wird zunächst das Dreieck ΔACS ausgewertet.



Das Dreieck ΔACS ist gleichschenklig, die von der Pyramidenspitze S ausgehende Höhe h_1 halbiert das Dreieck, im rechtwinkligen Dreieck aus Hypotenuse s, Kathete $\overline{AC}$ /2 und Kathete h_1 errechnet sich h_1 nach dem Satz des Pythagoras als:

$$h_1^2 = s^2 - \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 = 17^2 - 6{,}93^2 = 240{,}98 \Rightarrow h_1 = \sqrt{240{,}98} = 15{,}52 \text{ LE}.$$

IV. Mit der Höhe h_1 des Dreiecks ΔACS lässt sich nun die Höhe h_R des Dreiecks ΔACR bestimmen.



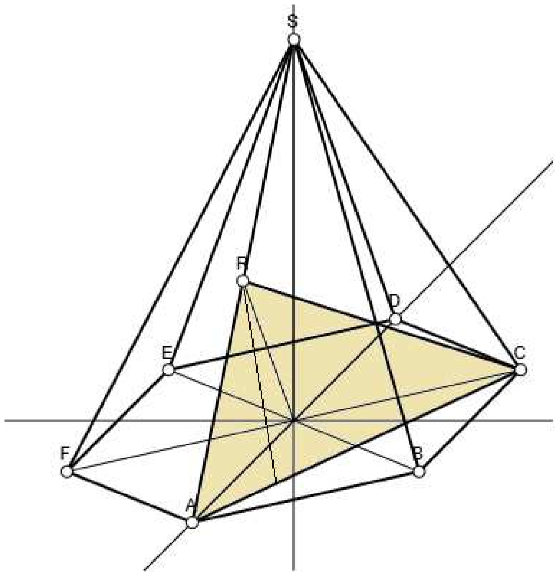
Es gilt nach dem 2. Strahlensatz, angewendet auf den Strahl $\overline{AS}$ mit kurzer Strecke s/2 und langer Strecke s sowie auf die Parallelen h_R und h_1 als kurze und lange Parallele:

$$\frac{\frac{s}{2}}{s} = \frac{h_R}{h_1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h_R}{15{,}52} \Rightarrow h_R = \frac{15{,}52}{2} = 7{,}76 \text{ LE.}$$

Damit ist die Höhe h_R des Dreiecks ΔACR als h_R = 7,76 LE berechnet.

V. Der gesuchte Flächeninhalt des Dreiecks ΔACR bestimmt sich vermöge der Formel $A_\Delta = gh/2$ mit der Grundseite $\overline{AC}$ = 13,86 LE und der Höhe h_R = 7,76 LE:

$$A_{\Delta ACR} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h_R = \frac{1}{2} \cdot 13{,}86 \cdot 7{,}76 = 53{,}78 \text{ FE.}$$



(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 05.2024 / Aufgabe 2099