Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Quadratische Pyramiden

Aufgabe: Gegeben seien die Punkte A(2|0|2), B(5|0|6), C(5|5|6) im dreidimensionalen Vektorraum.

a) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC.

b) Ergänze das Dreieck ΔABC durch die Ecke D und zu einem Parallelogramm und weise nach, dass das entstandene Viereck ABCD ein Quadrat ist. Bestimme den Diagonalenschnittpunkt M des Vierecks.

c) Die Ebene E enthält das Quadrat ABCD. Berechne eine Koordinatengleichung der Ebene.

d) Konstruiere ein Ebene F, die senkrecht auf der Ebene E steht und die Ecken A und C des Vierecks ABCD enthält.

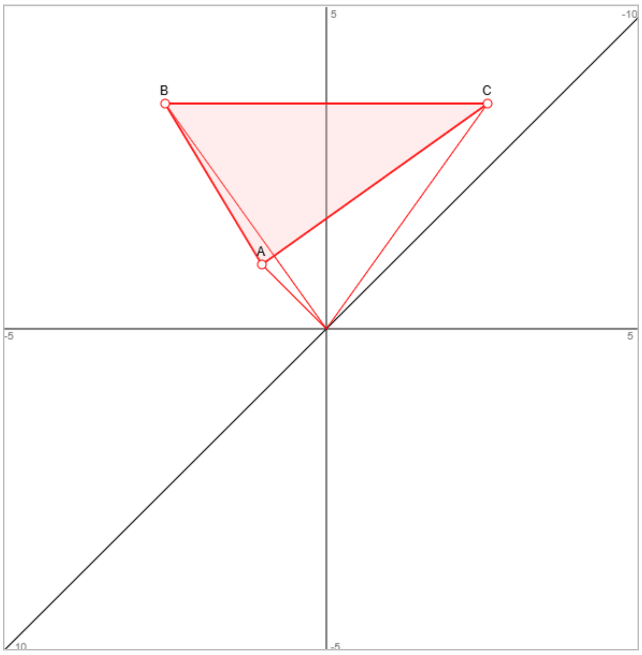
e) Zeige, dass die Gerade

$$\text{k: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -6{,}5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

auf der Ebene F liegt. Jeder Punkt S auf der Geraden k ist die Spitze einer quadratischen Pyramide mit Grundfläche ABCD. Weise nach, dass alle diese Pyramiden ABCDS dasselbe Volumen besitzen. Begründe, dass die Ebene F der Diagonalschnitt jeder Pyramide ist.

f) Bestimme die Pyramidenspitze S, für die die quadratische Pyramide regelmäßig ist. Berechne den Oberflächeninhalt dieser Pyramide.

Lösung: a) Das Dreieck ΔABC hat das Aussehen:



Hinsichtlich des Dreiecks ΔABC berechnen wir Umfang und Flächeninhalt:

Punkt: $A(a_1\|a_2\|a_3)$	A(2 | 0 | 2)
Punkt: $B(b_1\|b_2\|b_3)$	B(5 | 0 | 6)
Punkt: $C(c_1\|c_2\|c_3)$	C(5 | 5 | 6)
Bereich:	x_2-, x_3-Wert: +/- 5 (-> x_1-Wert)
Differenzvektor: AB-> =	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: AC-> =	$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: BC-> =	$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$
Seite: a = |BC->| =	5 LE
Seite: b = |AC->| =	7.071 LE
Seite: c = |AB->| =	5 LE
Bemerkung:	Dreieck ist gleichschenklig.
Umfang: u =	17.071 LE
	u = a + b + c
Winkel: α =	45°
Winkel: β =	90°
Winkel: γ =	45°
Bemerkung:	Dreieck ist rechtwinklig.
Winkelsumme =	180°
	α + β + γ = 180°
Normalenvektor: n-> = AB-> x AC-> =	$\begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$
Flächeninhalt/ΔABC: A_Δ =	12.5 FE
	A_Δ = |AB-> x AC->|/2

b) Die fehlende Ecke D des Parallelogramms ABCD ermitteln wir aus den Ecken des Dreiecks ΔABC, dem Ortsvektor $\overset{->}{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und dem Differenzvektor $\overset{->}{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ vermöge:

$\overset{->}{OD} = \overset{->}{OA} + \overset{->}{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ -> D(2|5|2).

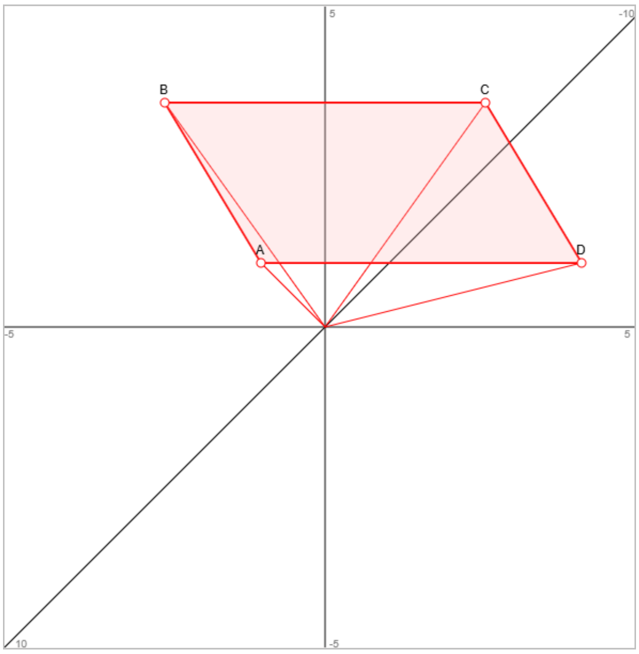
Das Viereck ABCD ist damit ein Parallelogramm und – wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks ΔABC (s. a)) – auch eine Raute. Um die Raute ABCD als Quadrat nachzuweisen, genügt es einen rechten Winkel im Viereck aufzufinden. Mit dem Differenzvektor $\overset{->}{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

ergibt sich als Skalarprodukt:

$$\overset{->}{AB} \cdot \overset{->}{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 = 0$$

und daher ein rechter Winkel an der Ecke B. Aus der Parallelogrammeigenschaft der Raute folgt, dass alle Winkel im Viereck rechte Winkel sind. Das Viereck ist damit ein <u>Quadrat</u>.

Punkt: $A(a_1\|a_2\|a_3)$	A(2 | 0 | 2)
Punkt: $B(b_1\|b_2\|b_3)$	B(5 | 0 | 6)
Punkt: $C(c_1\|c_2\|c_3)$	C(5 | 5 | 6)
Punkt: $D(d_1\|d_2\|d_3)$	D(2 | 5 | 2)
Bereich:	x_2-, x_3-Wert: +/- 5 (-> x_1-Wert)
Differenzvektor: $AB^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $BC^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $CD^{->}$ =	$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$
Differenzvektor: $AD^{->}$ =	$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$
Seite: $a = \|AB^{->}\|$ =	5 LE
Seite: $b = \|BC^{->}\|$ =	5 LE
Höhe: h_a =	5 LE
Höhe: h_b =	5 LE
Umfang: u =	20 LE
	$u = 2\|AB^{->}\| + 2\|BC^{->}\| = 2a + 2b$
Innenwinkel: α =	90°
Innenwinkel: β =	90°
Winkelsumme	360°
	2α + 2β = 360°
Bemerkung:	Parallelogramm ABCD als Quadrat
Ebene/Parallelogramm ABCD: E:	4 $*x_1$ + 0 $*x_2$ + -3 $*x_3$ = 2
Flächeninhalt/Parallelogramm ABCD: A_P =	25 FE
	$A_P = \|AB^{->} \times AD^{->}\| = ah_a = bh_b$



Der Diagonalenschnittpunkt des Quadrats ist die Mitte M der Strecke zwischen den Ecken A und C des Vierecks. Es gilt also:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\5\\6\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}7\\5\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3,5\\2,5\\4\end{pmatrix}$$ -> M(3,5|2,5|4).

c) Die Punkte A(2|0|2), B(5|0|6), C(5|5|6) spannen die Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 1$ (als Koordinatengleichung einer Ebene, die nicht durch den Koordinatenursprung verläuft) auf. Punktprobe mit den Ecken A, B, C führt auf ein lineares Gleichungssystem, das mit dem Gauß-Algorithmus gelöst werden kann:

Lineares Gleichungssystem:

Ecke A:	+	2*a*			+	2*c*	=	1
Ecke B:	+	5*a*			+	6*c*	=	1
Ecke C:	+	5*a*	+	5*b*	+	6*c*	=	1

Anfangstableau:

2 0 2 | 1
5 0 6 | 1
5 5 6 | 1

1. Schritt: 2*(*2*) - 5*(*1*) / 2*(*3*) - 5*(*1*) /

2 0 2 | 1
0 0 2 | -3
0 10 2 | -3

Zeilentausch: (*2*) <-> (*3*) /

2 0 2 | 1
0 10 2 | -3
0 0 2 | -3

2. Schritt: (keine Umformung) /

2 0 2 | 1
0 10 2 | -3
0 0 2 | -3

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

+	2*a*			+	2*c*	=	1
		+	10*b*	+	2*c*	=	-3
				+	2*c*	=	-3

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$c = -1.5$
$b = 0$
$a = 2$

Die gesuchte Ebene besitzt damit die Koordinatenform:

E: $2x_1 + 0x_2 – 1{,}5x_3 = 1$

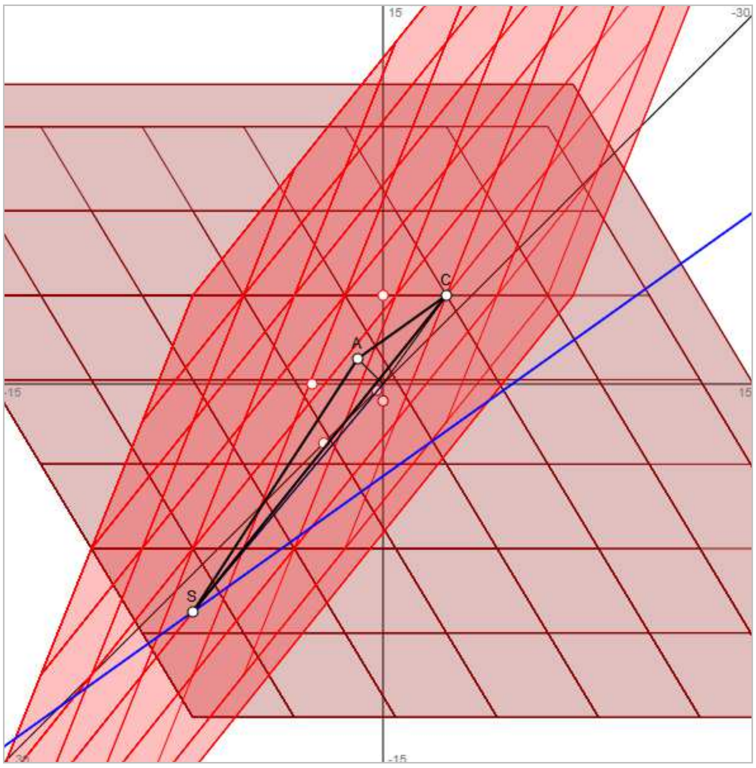
oder ganzzahlig:

E: $4x_1 – 3x_3 = 2$.

d) Die auf der Ebene E senkrecht stehende Ebene F durch die Punkte A und C bestimmen wir in der Koordinatenform. Und zwar gilt mit dem Differenzvektor $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}5\\5\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix}$ und dem Normalenvektor $\overset{->}{n_E} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ der Ebene E, dass

$$\overset{->}{AC} \times \overset{->}{n_E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 25 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ -> } \overset{->}{n_F} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

der Normalenvektor der Ebene F ist. Einsetzen des Punktes A(2|0|2) in die Koordinatengleichung F: $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = d$ ergibt $d = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 14$ und mithin als Ebenengleichung:
F: $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 14$.



e) I. Wir lassen die Gerade k und die Ebene F sich schneiden und haben:

Gerade k: $\overset{->}{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -6{,}5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ -> $x_1 = 5+3t$, $x_2 = -5+5t$, $x_3 = -6{,}5+4t$ -> Ebene F: $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 14$

-> $3(5+3t) - 5(-5+5t) + 4(-6{,}5+4t) = 14 \Leftrightarrow 15 + 9t + 25 - 25t - 26 + 16t = 14 \Leftrightarrow 14 = 14$ -> $k \subset F$.
Die Gerade k liegt damit auf der Ebene F.

II. Für einen Punkt S_t auf der Geraden k gilt: $S_t(5+3t|-5+5t|-6{,}5+4t)$, die Gerade k selbst ist wegen des Richtungsvektors $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \overset{->}{AC}$ bei A, C als Punkte der Grundflächenebene E parallel zu dieser Ebene E, so dass der Abstand zwischen jedem beliebigen Punkt S_k und der Ebene E derselbe ist, nämlich gemäß der Hesseschen Normalform mit $S_0(5|-5|-6{,}5)$:

$$d(S_t, E) = d(S_0, E) = \frac{|4 \cdot 5 + 0 - 3 \cdot (-6{,}5) - 2|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{37{,}5}{5} = 7{,}5 \text{ LE.}$$

Betrachten wir die Pyramide $ABCDS_t$ mit quadratischer Grundfläche ABCD und Grundflächeninhalt $G = 5^2 = 25$ FE sowie mit der Höhe $h = 7{,}5$ LE, so ergibt sich für jedes reelle t dasselbe Volumen:

V = $\frac{1}{3}Gh = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 7{,}5$ = 62,5 VE.

III. Die Grundflächenecken A und C sowie die Pyramidenspitze S_t liegen für jedes reelle t auf der Ebene F, so dass Letztere der Diagonalschnitt jeder quadratischen Pyramide $ABCDS_t$ ist.

f) Die quadratische Pyramide ABCDS ist regelmäßig, wenn die Pyramidenhöhe durch den Mittelpunkt M der Grundfläche (senkrecht) verläuft. Für S(5+3t|-5+5t|-6,5+4t) als gesuchte Pyramidenspitze und den die Höhe darstellenden Vektor $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 5+3t \\ -5+5t \\ -6{,}5+4t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 2{,}5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5+3t \\ -7{,}5+5t \\ -10{,}5+4t \end{pmatrix}$, muss daher (nur) gelten:

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5+3t \\ -7{,}5+5t \\ -10{,}5+4t \end{pmatrix} = 0$ ⇔ 3(1,5+3t) + 5(-7,5+5t) +4(-10,5+4t) = 0 ⇔

4,5 + 9t – 37,5 + 25t – 42 + 16t = 0 ⇔ 50t – 75 = 0 ⇔ 50t = 75 ⇔ t = 1,5.

Einsetzen von t = 1,5 in S(5+3t|-5+5t|-6,5+4t) ergibt:

S(5+3·1,5|-5+5·1,5|-6,5+4·1,5) = S(9,5|2,5|-0,5).

Die Spitze der regelmäßigen quadratischen Pyramide ist also: S(9,5|2,5|-0,5).

Punkt: $A(a_1\|a_2\|a_3)$	A(2	| 0	| 2)	☑ (eingegeben)	
Punkt: $B(b_1\|b_2\|b_3)$	B(5	| 0	| 6)	☑ (eingegeben)	
Punkt: $C(c_1\|c_2\|c_3)$	C(5	| 5	| 6)	☑ (eingegeben)	
Punkt: $D(d_1\|d_2\|d_3)$	D(2	| 5	| 2)	☐ (eingegeben)	
Punkt: $S(s_1\|s_2\|s_3)$	S(9.5	| 2.5	| -0.5)		
Zeichenbereich:	x_2-, x_3-Wert: +/- 10 (-> x_1-Wert)				
Ortsvektoren/ABCDS:	☑ (ja)				
Grundfläche/ABCD: G =	25				
	G = |AB-> x AD->|				
Höhe/Pyramide: h =	7.5				
	h = d(S,G)				
Volumen/Pyramide: V =	62.5				
	V = G*h/3 = |(AB-> x AD->) * AS->|/3				
Mantelfläche/ΔABS: M_1 =	19.764				
	M_1 = |AB-> x AS->|/2				
Mantelfläche/ΔBCS: M_2 =	19.764				
	M_2 = |BC-> x BS->|/2				
Mantelfläche/ΔCDS: M_3 =	19.764				
	M_3 = |CD-> x CS->|/2				
Mantelfläche/ΔDAS: M_4 =	19.764				
	M_4 = |DA-> x DS->|/2				
Mantelfläche/Pyramide: M =	79.057				
	M = $M_1 + M_2 + M_3 + M_4$				
Oberfläche/Pyramide: O =	104.057				
	O = G + M				

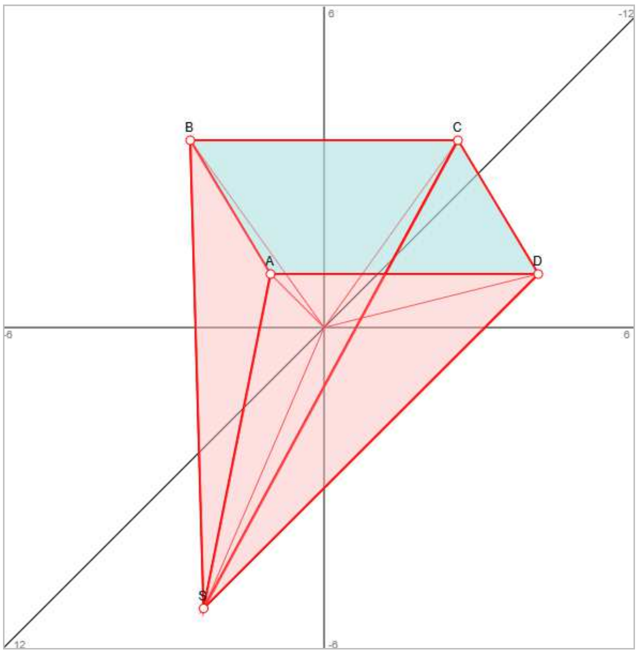
Der Oberflächeninhalt der regelmäßigen Pyramide ist: O = G + 4·M_1, wobei G die Grundfläche, M_1 die Fläche des Manteldreiecks ΔABS bezeichnet. Der Inhalt der Dreieckfläche wird mit dem halben Betrag des Kreuzprodukts berechnet:

$M_1 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AS}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7{,}5\\2{,}5\\-2{,}5\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}10\\37{,}5\\7{,}5\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{10^2+37{,}5^2+7{,}5^2} = \frac{25\sqrt{10}}{4}$ = 19,764 FE,

so dass der Inhalt der Pyramidenoberfläche:

$O = 25 + 4\cdot\frac{25\sqrt{10}}{4} = 25 + 25\sqrt{10} = 25(1+\sqrt{10})$ = 104,057 FE

beträgt. Die regelmäßige quadratische Pyramide ABCDS hat das Aussehen:



(FE = Flächeneinheit, LE = Längeneinheit, VE = Volumeneinheit)

www.michael-buhlmann.de / 07.2024 / Aufgabe 2178