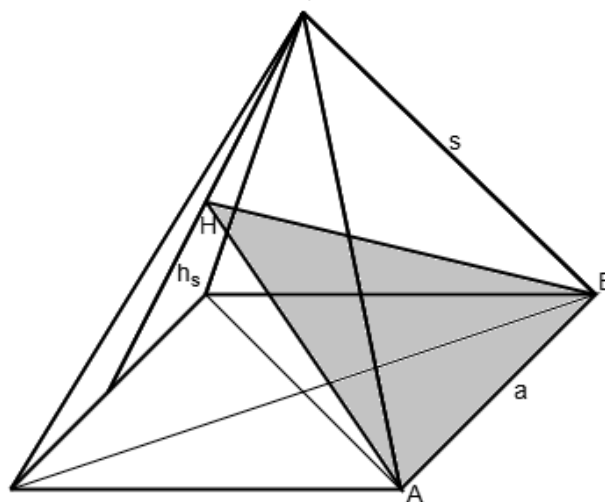


Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung/Geometrie

> Quadratische Pyramide

Aufgabe: In einer quadratischen Pyramide ist die Grundkante $a = 14,8$ cm und die Seitenkante $s = 17,2$ cm lang. Gegenüber den Grundflächenecken A und B befindet sich der Punkt H, der die Seitenhöhe h_s in der Mitte teilt. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABH.



1. Lösung (Vektorrechnung): I. Die Grundkante $a = 14,8$ cm und die Seitenkante $s = 17,2$ cm der quadratischen Pyramide führen auf die Höhe des Körpers vermöge des Satzes des Pythagoras. Es gilt:

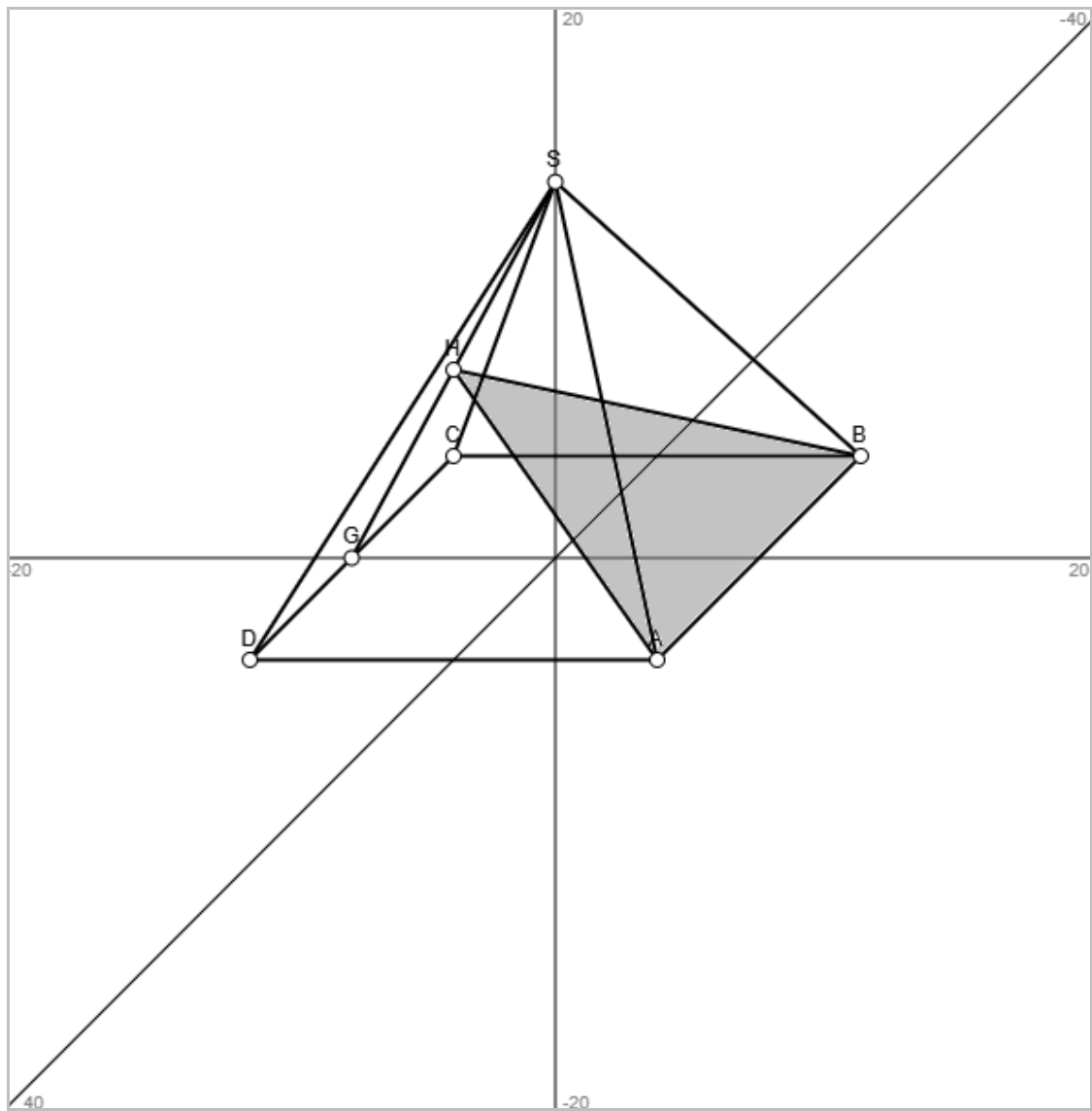
$$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{s^2 - \frac{a^2}{2}} \Rightarrow h = \sqrt{17,2^2 - \frac{14,8^2}{2}} = \sqrt{186,32} = 13,65 \text{ cm.}$$

II. Im x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystem der dreidimensionalen Vektorrechnung wird nun die quadratische Pyramide symmetrisch zur x_3 -Achse platziert. Die Ecken der Pyramidengrundfläche lauten bei $a/2 = 7,4$ cm:

$A(7,4|7,4|0)$, $B(-7,4|7,4|0)$, $C(-7,4|-7,4|0)$, $D(7,4|-7,4|0)$,

die Pyramidenspitze ist wegen $h = 13,65$ cm:

$S(0|0|13,65)$.



III. Der Punkt H ist die Mitte zwischen der Pyramidenspitze $S(0|0|13,65)$ und dem Punkt $G(0|-7,4|0)$ auf der x_2 -Achse, also:

$$\vec{OH} = \frac{1}{2}(\vec{OG} + \vec{OS}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -7,4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13,65 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -7,4 \\ 13,65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3,7 \\ 6,83 \end{pmatrix} \Rightarrow H(0|-3,7|6,83).$$

IV. Der Inhalt der Dreiecksfläche ABH wird mit dem halben Betrag des Kreuzprodukts berechnet. Es gilt:

$$\vec{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3,7 \\ 6,83 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7,4 \\ 7,4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7,4 \\ -11,1 \\ 6,83 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BH} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3,7 \\ 6,83 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7,4 \\ 7,4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,4 \\ -11,1 \\ 6,83 \end{pmatrix}$$

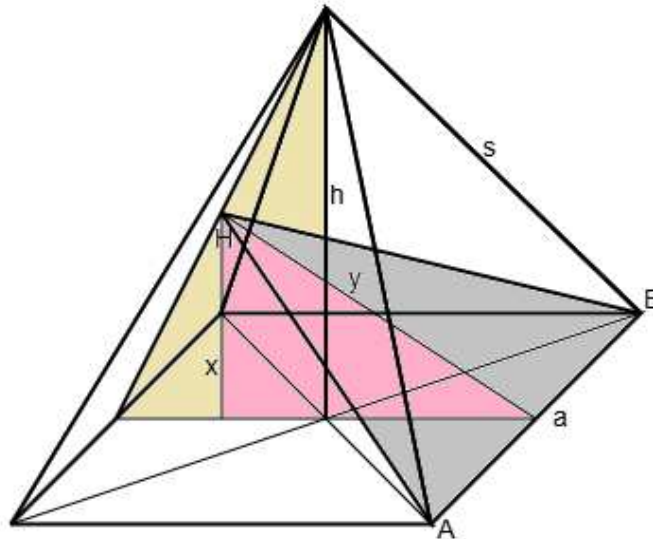
$$A_{ABH} = \frac{1}{2}|\vec{AH} \times \vec{BH}| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -7,4 \\ -11,1 \\ 6,83 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7,4 \\ -11,1 \\ 6,83 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 10 \\ 101,084 \\ 164,28 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 101,084^2 + 164,28^2} =$$

$$192,88/2 = 96,44 \text{ cm}^2.$$

2. Lösung (Geometrie): I. Die Grundkante $a = 14,8$ cm und die Seitenkante $s = 17,2$ cm der quadratischen Pyramide führen auf die Seitenhöhe und die Höhe des Körpers vermöge des Satzes des Pythagoras. Es gilt:

$$h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \Rightarrow h_s = \sqrt{17,2^2 - \left(\frac{14,8}{2}\right)^2} = \sqrt{17,2^2 - 7,4^2} = \sqrt{241,08} = 15,53 \text{ cm},$$

$$h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \Rightarrow h = \sqrt{15,53^2 - \left(\frac{14,8}{2}\right)^2} = \sqrt{15,53^2 - 7,4^2} = \sqrt{186,42} = 13,65 \text{ cm}.$$



II. Im rechtwinkligen Dreieck der Katheten $a/2$ und h sowie der Hypotenuse h_s befindet sich die zu h parallele Strecke x , die vom Punkt H ausgehend senkrecht auf der Pyramidengrundfläche steht. Im Dreieck gilt mit Strahl h_s und den Parallelen x und h der 2. Strahlensatz (von der Mitte der Grundkante aus gesehen):

$$\frac{h_s}{\frac{2}{h}} = \frac{x}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{h} \Rightarrow x = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} \cdot 13,65 = 6,83 \text{ cm}.$$

III. Nach dem 1. Strahlensatz teilt (von der Mitte der Grundkante aus gesehen) die Parallele x den 2. Strahl $a/2$ in die Abschnitte $a/4$ und $a/4 = 3,7$ cm.

IV. Betrachtet wird nun das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten $x = 6,83$ cm und $a/2 + a/4 = 3a/4 = 11,1$ cm. Die Hypotenuse y im Dreieck errechnet sich nach dem Satz des Pythagoras:

$$y = \sqrt{x^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2} \Rightarrow y = \sqrt{6,83^2 + 11,1^2} = \sqrt{169,86} = 13,03 \text{ cm}.$$

V. Der gesuchte Flächeninhalt des Dreiecks ABH ergibt sich wegen $a = 14,8$ cm als Grundseite und $y = 13,03$ cm als Höhe des Dreiecks:

$$A_{ABH} = \frac{1}{2} ay = \frac{1}{2} \cdot 14,8 \cdot 13,03 = 96,42 \text{ cm}^2.$$

(cm = Zentimeter, cm^2 = Quadratzentimeter)