Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra
> Quadratische Gleichungen (mit Formvariablen)

Aufgabe: Bestimme für feste reelle Zahlen a, b die Lösung der quadratischen Gleichung:

$$x^2 + (3b - 2a)x = 6ab\,.$$

1. Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von quadratischen Gleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x, die folgende Vorgehensweise: Quadratische Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form $x^2 + px + q = 0$ (*) mit reellen Zahlen p, q genügen. Die Lösung der quadratischen Gleichung (*) ist dann: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (p-q-Formel). Um die Lösung einer quadratischen Gleichung der Form (*) zu erlangen, sind Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen; es gilt Strichrechnung vor Punktrechnung, die p-q-Formel führt auf die 0 bis 2 Lösungen der Gleichung.

Formvariablen (oder Parameter) werden dabei behandelt wie normale Zahlen, werden also als feste reelle Größen vorausgesetzt.

II. Wir gehen mittels Gleichungsumformungen unter Verwendung der binomischen Formeln wie folgt vor:

$$x^2 + (3b - 2a)x = 6ab \qquad | -6ab$$

$$x^2 + (3b - 2a)x - 6ab = 0 \qquad \text{(p-q-Formel: p = 3b–2a, q = -6ab)}$$

$$x_{1,2} = -\frac{3b-2a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3b-2a}{2}\right)^2 - (-6ab)}$$

$$x_{1,2} = -\frac{3b-2a}{2} \pm \sqrt{\frac{9b^2 - 12ab + 4a^2}{4} + 6ab}$$

$$x_{1,2} = -\frac{3b-2a}{2} \pm \sqrt{\frac{9b^2 - 12ab + 4a^2}{4} + \frac{24ab}{4}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{3b-2a}{2} \pm \sqrt{\frac{9b^2 - 12ab + 4a^2 + 24ab}{4}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{3b-2a}{2} \pm \sqrt{\frac{9b^2 + 12ab + 4a^2}{4}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{3b-2a}{2} \pm \sqrt{\frac{(3b+2a)^2}{4}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{3b-2a}{2} \pm \frac{3b+2a}{2}$$

$$x_1 = -\frac{3b-2a}{2} - \frac{3b+2a}{2} = -\frac{6b}{2} = -3b\,,\quad x_{1,2} = -\frac{3b-2a}{2} + \frac{3b+2a}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$$

$x_1 = -3b$, $x_2 = 2a$

Wir erhalten $x_1 = -3b$ und $x_2 = 2a$ als Lösungen; Lösungsmenge ist also: L = {-3b; 2a}.

2. Lösung: I. Allgemein gilt für das Lösen von quadratischen Gleichungen, also von Gleichungen z.B. mit der Variablen x, die folgende Vorgehensweise: Quadratische Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form $ax^2 + bx + c = 0$ (*) mit reellen Zahlen a, b, c, a≠0, genügen.

Die Lösung der quadratischen Gleichung (*) ist dann: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel). Um die Lösung einer quadratischen Gleichung der Form (*) zu erlangen, sind Term- und Gleichungsumformungen durchzuführen, die die Terme der Gleichung u.a. durch das Auflösen von Klammern, durch Addition/Subtraktion von Summanden und Multiplikation/Division von Faktoren betreffen; es gilt Strichrechnung vor Punktrechnung, die a-b-c-Formel führt auf die 0 bis 2 Lösungen der Gleichung.

Formvariablen (oder Parameter) werden dabei behandelt wie normale Zahlen, werden also als feste reelle Größen vorausgesetzt.

II. Wir gehen mittels Gleichungsumformungen unter Verwendung der binomischen Formeln wie folgt vor:

$x^2 + (3b-2a)x = 6ab$ | -6ab

$x^2 + (3b-2a)x - 6ab = 0$ (a*-b*-c*-Formel: a* = 1, b* = 3b–2a, c* = -6ab)

$$x_{1,2} = \frac{-(3b-2a) \pm \sqrt{(3b-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6ab)}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(3b-2a) \pm \sqrt{9b^2 - 12ab + 4a^2 + 24ab}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(3b-2a) \pm \sqrt{9b^2 + 12ab + 4a^2}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(3b-2a) \pm \sqrt{(3b-2a)^2}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(3b-2a) \pm (3b-2a)}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(3b-2a) - (3b-2a)}{2} = \frac{-6b}{2} = -3b\,,\quad x_{1,2} = \frac{-(3b-2a) + (3b-2a)}{2} = \frac{4a}{2} = 2a$$

$x_1 = -4$, $x_2 = 21$

Wir erhalten $x_1 = -3b$ und $x_2 = 2a$ als Lösungen; Lösungsmenge ist also: L = {-3b; 2a}.