

Mathematikaufgaben

> Arithmetik

> Quadratwurzeln

Aufgabe: Bestimme eine Näherung zu der irrationalen Wurzel $\sqrt{2}$ mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens (Intervallschachtelung).

Lösung: I. Vorgehensweise: Jede irrationale Wurzel \sqrt{w} aus einer natürlichen Zahl w findet sich in einem Intervall $[a; b]$ mit $a^2 < w < b^2$ und den Quadratzahlen a^2, b^2 . Das Verfahren der Intervallhalbierung (Intervallhalbierungsverfahren) unterteilt dieses Intervall vermöge der Intervallmitte $m = (a+b)/2$ in eine linke Intervallhälfte $[a; m]$ und eine rechte Intervallhälfte $[m; b]$. Ist dann $m^2 < w$, so liegt \sqrt{w} in der rechten Intervallhälfte $[m; b]$; ist $m^2 > w$, so liegt \sqrt{w} in der linken Intervallhälfte $[a; m]$. Das Verfahren der Intervallhalbierung kann dann für die Intervallhälfte $[a; m]$ bzw. $[m; b]$ wiederholt werden, in der \sqrt{w} liegt. Man erhält eine Folge von ineinander geschachtelten Intervallen (Intervallschachtelung), die auf den Dezimalwert von \sqrt{w} führt. - Intervall als reelle Zahlenmenge $[a; b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$, $a < b$; \in = 'Element von'; Wurzel \sqrt{w} als Zahl, die mit sich selbst multipliziert w ergibt, also mit $(\sqrt{w})^2 = w$. Im Folgenden ist $w = 2$.

II. Wegen $1 < 2 < 4$ und damit $1 < \sqrt{2} < 2$ ergibt sich folgende Tabelle bei 20-maliger Durchführung des Intervallhalbierungsverfahrens:

Schritt	Linkes Intervall	Rechtes Intervall	Intervallmitte, Intervallauswahl (Intervallmitte -> Intervallmitte zum Quadrat -> [Größer-, Kleiner-] Vergleich mit 2 -> [linke, rechte] Intervallhälfte)
1		$\sqrt{2} \in [1; 2]$	1.5 -> $1.5^2 = 2.25 > 2$ -> linke Intervallhälfte [1; 1.5]
1	$\sqrt{2} \in [1; 1.5]$	[1.5; 2]	1.25 -> $1.25^2 = 1.5625 < 2$ -> rechte Intervallhälfte [1.25; 1.5]
2	[1; 1.25]	$\sqrt{2} \in [1.25; 1.5]$	1.375 -> $1.375^2 = 1.890625 < 2$ -> rechte Intervallhälfte [1.375; 1.5]
3	[1.25; 1.375]	$\sqrt{2} \in [1.375; 1.5]$	1.4375 -> $1.4375^2 = 2.06640625 > 2$ -> linke Intervallhälfte [1.375; 1.4375]
4	$\sqrt{2} \in [1.375; 1.4375]$	[1.4375; 1.5]	1.40625 -> $1.40625^2 = 1.9775390625 < 2$ -> rechte Intervallhälfte [1.40625; 1.4375]
5	[1.375; 1.40625]	$\sqrt{2} \in [1.40625; 1.4375]$	1.421875 -> $1.421875^2 = 2.021728515625 > 2$ -> linke Intervallhälfte [1.40625; 1.421875]
6	$\sqrt{2} \in [1.40625; 1.421875]$	[1.421875; 1.4375]	1.4140625 -> $1.4140625^2 = 1.99957275390625 < 2$ -> rechte Intervallhälfte [1.4140625; 1.421875]
7	[1.40625; 1.4140625]	$\sqrt{2} \in [1.4140625; 1.421875]$	1.41796875 -> $1.41796875^2 = 2.0106353759765625 > 2$ -> linke Intervallhälfte [1.4140625; 1.41796875]
8	$\sqrt{2} \in [1.4140625; 1.41796875]$	[1.41796875; 1.421875]	1.416015625 -> $1.416015625^2 = 2.0051002502441406 > 2$ -> linke Intervallhälfte [1.4140625; 1.416015625]

9	$\sqrt{2} \in [1.4140625; 1.416015625]$	[1.416015625; 1.41796875]	$1.4150390625 \rightarrow 1.4150390625^2 = 2.002335548400879 > 2 \rightarrow$ linke Intervallhälfte [1.4140625; 1.4150390625]
10	$\sqrt{2} \in [1.4140625; 1.4150390625]$	[1.4150390625; 1.416015625]	$1.41455078125 \rightarrow 1.41455078125^2 = 2.0009539127349853 > 2 \rightarrow$ linke Intervallhälfte [1.4140625; 1.41455078125]
11	$\sqrt{2} \in [1.4140625; 1.41455078125]$	[1.41455078125; 1.4150390625]	$1.414306640625 \rightarrow 1.414306640625^2 = 2.000263273715973 > 2 \rightarrow$ linke Intervallhälfte [1.4140625; 1.414306640625]
12	$\sqrt{2} \in [1.4140625; 1.414306640625]$	[1.414306640625; 1.41455078125]	$1.4141845703125 \rightarrow 1.4141845703125^2 = 1.9999179989099502 < 2 \rightarrow$ rechte Intervallhälfte [1.4141845703125; 1.414306640625]
13	[1.4140625; 1.4141845703125]	$\sqrt{2} \in [1.4141845703125; 1.414306640625]$	$1.41424560546875 \rightarrow 1.41424560546875^2 = 2.0000906325876713 > 2 \rightarrow$ linke Intervallhälfte [1.4141845703125; 1.41424560546875]
14	$\sqrt{2} \in [1.4141845703125; 1.41424560546875]$	[1.41424560546875; 1.414306640625]	$1.414215087890625 \rightarrow 1.414215087890625^2 = 2.000004314817488 > 2 \rightarrow$ linke Intervallhälfte [1.4141845703125; 1.414215087890625]
15	$\sqrt{2} \in [1.4141845703125; 1.414215087890625]$	[1.414215087890625; 1.41424560546875]	$1.4141998291015625 \rightarrow 1.4141998291015625^2 = 1.9999611566308885 < 2 \rightarrow$ rechte Intervallhälfte [1.4141998291015625; 1.414215087890625]
16	[1.4141845703125; 1.4141998291015625]	$\sqrt{2} \in [1.4141998291015625; 1.414215087890625]$	$1.4142074584960937 \rightarrow 1.4142074584960937^2 = 1.9999827356659807 < 2 \rightarrow$ rechte Intervallhälfte [1.4142074584960937; 1.414215087890625]
17	[1.4141998291015625; 1.4142074584960937]	$\sqrt{2} \in [1.4142074584960937; 1.414215087890625]$	$1.4142112731933593 \rightarrow 1.4142112731933593^2 = 1.9999935252271825 < 2 \rightarrow$ rechte Intervallhälfte [1.4142112731933593; 1.414215087890625]
18	[1.4142074584960937; 1.4142112731933593]	$\sqrt{2} \in [1.4142112731933593; 1.414215087890625]$	$1.4142131805419921 \rightarrow 1.4142131805419921^2 = 1.999989200186974 < 2 \rightarrow$ rechte Intervallhälfte [1.4142131805419921; 1.414215087890625]
19	[1.4142112731933593; 1.4142131805419921]	$\sqrt{2} \in [1.4142131805419921; 1.414215087890625]$	$1.4142141342163086 \rightarrow 1.4142141342163086^2 = 2.0000016174171833 > 2 \rightarrow$ linke Intervallhälfte [1.4142131805419921; 1.4142141342163086]
20	$\sqrt{2} \in [1.4142131805419921; 1.4142141342163086]$	[1.4142141342163086; 1.414215087890625]	$1.4142136573791504 \rightarrow 1.4142136573791504^2 = 2.000000268717713 > 2 \rightarrow$ linke Intervallhälfte [1.4142131805419921; 1.4142136573791504]
...

Als Näherung zur Wurzel $\sqrt{2}$ kann laut Schritt 20 des Intervallhalbierungsverfahrens (gleiche Stellen vor und hinter dem Komma bei der linken und rechten Grenze der Intervallhälfte) die Dezimalzahl 1.414213... gelten. Zum Vergleich: $\sqrt{2} = 1.4142135623730951$.

www.michael-buhlmann.de / 11.2015 / Aufgabe 142