Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Arithmetik
> Quadratwurzeln

Aufgabe: Bestimme eine Näherung zu der irrationalen Wurzel $\sqrt{2}$ mit Hilfe des Intervallhalbierungsverfahrens (Intervallschachtelung).

Lösung: I. Vorgehensweise: Jede irrationale Wurzel $\sqrt{w}$ aus einer natürlichen Zahl w findet sich in einem Intervall [a; b] mit $a^2 < w < b^2$ und den Quadratzahlen a^2, b^2. Das Verfahren der Intervallhalbierung (Intervallhalbierungsverfahren) unterteilt dieses Intervall vermöge der Intervallmitte $m = (a+b)/2$ in eine linke Intervallhälfte [a; m] und eine rechte Intervallhälfte [m; b]. Ist dann $m^2 < w$, so liegt $\sqrt{w}$ in der rechten Intervallhälfte [m; b]; ist $m^2 > w$, so liegt $\sqrt{w}$ in der linken Intervallhälfte [a; m]. Das Verfahren der Intervallhalbierung kann dann für die Intervallhälfte [a; m] bzw. [m; b] wiederholt werden, in der $\sqrt{w}$ liegt. Man erhält eine Folge von ineinander geschachtelten Intervallen (Intervallschachtelung), die auf den Dezimalwert von $\sqrt{w}$ führt. - Intervall als reelle Zahlenmenge $[a; b] = \{x\in\mathbf{R} | a\le x\le b\}$, $a<b$; $\in$ = 'Element von'; Wurzel $\sqrt{w}$ als Zahl, die mit sich selbst multipliziert w ergibt, also mit $(\sqrt{w})^2 = w$. Im Folgenden ist w = 2.

II. Wegen $1 < 2 < 4$ und damit $1 < \sqrt{2} < 2$ ergibt sich folgende Tabelle bei 20-maliger Durchführung des Intervallhalbierungsverfahrens:

Schritt	Linkes Intervall	Rechtes Intervall	**Intervallmitte, Intervallauswahl** (Intervallmitte -> Intervallmitte zum Quadrat -> [Größer-, Kleiner-] Vergleich mit 2 -> [linke, rechte] Intervallhälfte)
1	$\sqrt{2}\in$[1; 2]		1.5 -> 1.5^2 = 2.25 > 2 -> linke Intervallhälfte [1; 1.5]
1	$\sqrt{2}\in$[1; 1.5]	[1.5; 2]	1.25 -> 1.25^2 = 1.5625 < 2 -> rechte Intervallhälfte [1.25; 1.5]
2	[1; 1.25]	$\sqrt{2}\in$[1.25; 1.5]	1.375 -> 1.375^2 = 1.890625 < 2 -> rechte Intervallhälfte [1.375; 1.5]
3	[1.25; 1.375]	$\sqrt{2}\in$[1.375; 1.5]	1.4375 -> 1.4375^2 = 2.06640625 > 2 -> linke Intervallhälfte [1.375; 1.4375]
4	$\sqrt{2}\in$[1.375; 1.4375]	[1.4375; 1.5]	1.40625 -> 1.40625^2 = 1.9775390625 < 2 -> rechte Intervallhälfte [1.40625; 1.4375]
5	[1.375; 1.40625]	$\sqrt{2}\in$[1.40625; 1.4375]	1.421875 -> 1.421875^2 = 2.021728515625 > 2 -> linke Intervallhälfte [1.40625; 1.421875]
6	$\sqrt{2}\in$[1.40625; 1.421875]	[1.421875; 1.4375]	1.4140625 -> 1.4140625^2 = 1.99957275390625 < 2 -> rechte Intervallhälfte [1.4140625; 1.421875]
7	[1.40625; 1.4140625]	$\sqrt{2}\in$[1.4140625; 1.421875]	1.41796875 -> 1.41796875^2 = 2.0106353759765625 > 2 -> linke Intervallhälfte [1.4140625; 1.41796875]
8	$\sqrt{2}\in$[1.4140625; 1.41796875]	[1.41796875; 1.421875]	1.416015625 -> 1.416015625^2 = 2.0051002502441406 > 2 -> linke Intervallhälfte [1.4140625; 1.416015625]

9	√2∈[1.4140625; 1.416015625]	[1.416015625; 1.41796875]	1.4150390625 -> 1.4150390625^2 = 2.002335548400879 > 2 -> linke Intervallhälfte [1.4140625; 1.4150390625]
10	√2∈[1.4140625; 1.4150390625]	[1.4150390625; 1.416015625]	1.41455078125 -> 1.41455078125^2 = 2.0009539127349853 > 2 -> linke Intervallhälfte [1.4140625; 1.41455078125]
11	√2∈[1.4140625; 1.41455078125]	[1.41455078125; 1.4150390625]	1.414306640625 -> 1.4143066406252 = 2.000263273715973 > 2 -> linke Intervallhälfte [1.4140625; 1.414306640625]
12	√2∈[1.4140625; 1.414306640625]	[1.414306640625; 1.41455078125]	1.4141845703125 -> 1.41418457031252 = 1.9999179989099502 < 2 -> rechte Intervallhälfte [1.4141845703125; 1.414306640625]
13	[1.4140625; 1.4141845703125]	√2∈[1.4141845703125; 1.414306640625]	1.41424560546875 -> 1.414245605468752 = 2.0000906325876713 > 2 -> linke Intervallhälfte [1.4141845703125; 1.41424560546875]
14	√2∈[1.4141845703125; 1.41424560546875]	[1.41424560546875; 1.414306640625]	1.414215087890625 -> 1.4142150878906252 = 2.000004314817488 > 2 -> linke Intervallhälfte [1.4141845703125; 1.414215087890625]
15	√2∈[1.4141845703125; 1.414215087890625]	[1.414215087890625; 1.41424560546875]	1.4141998291015625 -> 1.41419982910156252 = 1.9999611566308885 < 2 -> rechte Intervallhälfte [1.4141998291015625; 1.414215087890625]
16	[1.4141845703125; 1.4141998291015625]	√2∈[1.4141998291015625; 1.414215087890625]	1.4142074584960937 -> 1.41420745849609372 = 1.9999827356659807 < 2 -> rechte Intervallhälfte [1.4142074584960937; 1.414215087890625]
17	[1.4141998291015625; 1.4142074584960937]	√2∈[1.4142074584960937; 1.414215087890625]	1.4142112731933593 -> 1.41421127319335932 = 1.9999935252271825 < 2 -> rechte Intervallhälfte [1.4142112731933593; 1.414215087890625]
18	[1.4142074584960937; 1.4142112731933593]	√2∈[1.4142112731933593; 1.414215087890625]	1.4142131805419921 -> 1.41421318054199212 = 1.9999989200186974 < 2 -> rechte Intervallhälfte [1.4142131805419921; 1.414215087890625]
19	[1.4142112731933593; 1.4142131805419921]	√2∈[1.4142131805419921; 1.414215087890625]	1.4142141342163086 -> 1.41421413421630862 = 2.0000016174171833 > 2 -> linke Intervallhälfte [1.4142131805419921; 1.4142141342163086]
20	√2∈[1.4142131805419921; 1.4142141342163086]	[1.4142141342163086; 1.414215087890625]	1.4142136573791504 -> 1.41421365737915042 = 2.000000268717713 > 2 -> linke Intervallhälfte [1.4142131805419921; 1.4142136573791504]
...	...	...	...

Als Näherung zur Wurzel √2 kann laut Schritt 20 des Intervallhalbierungsverfahrens (gleiche Stellen vor und hinter dem Komma bei der linken und rechten Grenze der Intervallhälfte) die Dezimalzahl 1.414213… gelten. Zum Vergleich: √2 = 1.4142135623730951.

www.michael-buhlmann.de / 11.2015 / Aufgabe 142