Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben

> Folgen, Reihen

> Reihe

Aufgabe: Zeige, dass die Reihe:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} .$$

konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Lösung: Wir bestimmen den Grenzwert der Reihe und erhalten damit deren Konvergenz. Dazu betrachten wir die Folge der Partialsummen:

$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$, $n \varepsilon \mathbf{N}$

und haben auf der Grundlage des Koeffizientenvergleichs:

$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{A}{i} + \frac{B}{i+1}$ ⇔ 1 = A(i+1) + Bi

i = 0 -> 1 = A·(0+1) + B·0 = A -> A = 1
i = -1 -> 1 = A·(-1+1) + B·(-1) = -B -> B = -1

$\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$

für jedes Folgenglied die Umformung:

$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} = 1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Nun ist:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n->\infty} s_n = \lim_{n->\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1 ,$$

so dass die Reihe konvergiert und den Grenzwert 1 besitzt. Damit gilt:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1.$$

Für jede endliche Summe ergibt sich noch:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} .$$

(**N** = Menge der natürlichen Zahlen)

www.michael-buhlmann.de / 10.2023 / Aufgabe 1905