

Mathematikaufgaben

> Funktionen

> Schnittpunkte

Aufgabe: Berechne die Schnittpunkte zwischen den ganz rationalen Funktionen:

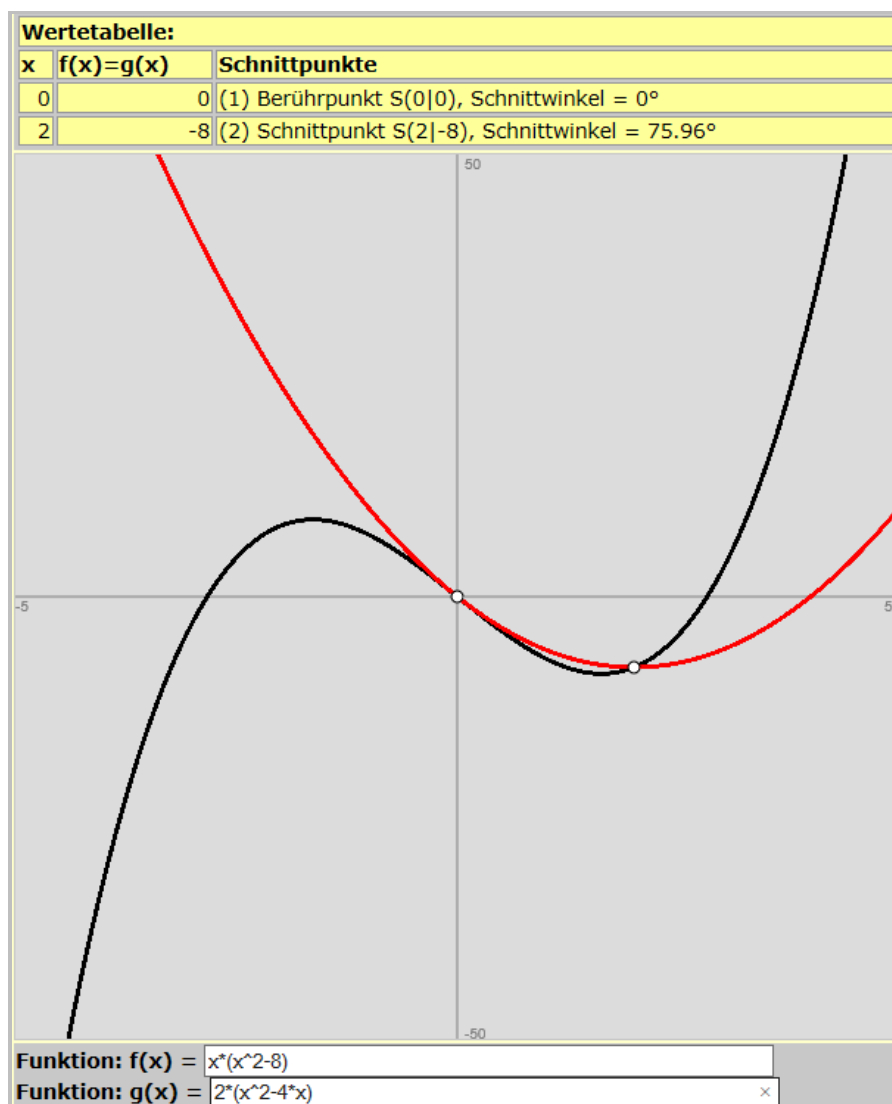
$$f(x) = x(x^2 - 8)$$

$$g(x) = 2(x^2 - 4x)$$

Lösung: I. Allgemein gilt, dass zur Schnittpunktberechnung zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ die Gleichung:

$$f(x) = g(x) \quad (*)$$

nach x aufzulösen ist. Im Falle ganz rationaler Funktionen geht dies etwa mit Hilfe von Ausklammern, Substitution (biquadratischer Gleichungen), abc- oder pq-Formel sowie auch durch Polynomdivision. Die Lösungen x_1, x_2, \dots der Gleichung $(*)$ sind die Schnittstellen der Funktionen; die Schnittpunkte ergeben sich aus dem Einsetzen der x_1, x_2, \dots in die Funktionsgleichungen $f(x)$ oder $g(x)$, so dass $S_1(x_1|f(x_1)) = (x_1|g(x_1))$, $S_2(x_2|f(x_2)) = (x_2|g(x_2))$, ...



II. Wir lösen die Gleichung $f(x) = g(x)$ nach x wie folgt auf:

$$f(x) = g(x)$$

$$x(x^2 - 8) = 2(x^2 - 4x) \quad (\text{Klammern auflösen})$$

$$x^3 - 8x = 2x^2 - 8x \quad | +8x$$

$$x^3 = 2x^2 \quad | -2x^2$$

$$x^3 - 2x^2 = 0 \quad (\text{Ausklammern})$$

$$x^2(x-2) = 0 \quad (\text{Satz vom Nullprodukt})$$

$$x^2 = 0, x-2 = 0$$

Die zwei einfachen Gleichungen sind:

$$x^2 = 0 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x = 0$$

und:

$$x-2 = 0 \quad | +2$$

$$x = 2,$$

so dass sich als Schnittstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ ergeben.

III. Die Schnittpunkte erhalten wir durch Einsetzen der Schnittstellen z.B. in die Funktion

$$f(x) = x(x^2 - 8). \text{ Also:}$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow S_1(0|0)$$

$$x_2 = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \cdot (2^2 - 8) = 2 \cdot (4 - 8) = 2 \cdot (-4) = -8 \Rightarrow S_2(2|-8).$$

Die gesuchten Schnittpunkte sind damit: $S_1(0|0)$, $S_2(2|-8)$ (siehe auch die Abbildung).