Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Schnittpunkte

Aufgabe: Zeige, dass sich die beiden Funktionen:

$$f(x) = \frac{1}{8}(x^2 + 31)$$
$$g(x) = \frac{4}{x}$$

in einem einzigen Schnittpunkt senkrecht schneiden.

Lösung: I. a) Allgemein gilt, dass zur Schnittpunktberechnung zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x) die Gleichung:

$$f(x) = g(x) \quad (*)$$

nach x aufzulösen ist. Die Lösungen x_1, x_2, … der Gleichung (*) sind die Schnittstellen der Funktionen; die Schnittpunkte ergeben sich aus dem Einsetzen der x_1, x_2, … in die Funktionsgleichungen f(x) oder g(x), so dass $S_1(x_1|f(x_1)) = (x_1|g(x_1))$, $S_2(x_2|f(x_2)) = (x_2|g(x_2))$, …

b) Schneiden sich zwei Funktionen f(x) und g(x) senkrecht, so gilt im Schnittpunkt $S(x_0|f(x_0)) = (x_0|g(x_0))$ die Orthogonalitätsbeziehung:

$$f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$$

mit den 1. Ableitungen f'(x) und g'(x). Weiter ergibt sich zur Berechnung des (spitzen) Schnittwinkels φ im Schnittpunkt $S(x_0|f(x_0)) = (x_0|g(x_0))$ die Formel:

$$\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$$

mit $m_1 = f'(x_0)$ und $m_2 = g'(x_0)$ und daher:

$$\tan\varphi = \left|\frac{g'(x_0) - f'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}\right|.$$

II. Wir lösen die Gleichung $f(x) = g(x)$ nach x wie folgt auf:

f(x) = g(x)

$\frac{1}{8}(x^2 + 31) = \frac{4}{x}$ | (Überkreuzmultiplikation)

$x(x^2 + 31) = 4 \cdot 8$ (Vereinfachen)

$x^3 + 31x = 32$ | -32

$x^3 + 31x - 32 = 0$

Die vorstehende (Polynom-) Gleichung hat als einzige Lösung x = 1 (wie man etwa durch Polynomdivision nachweisen kann). Schnittstelle ist damit $x_0 = 1$, Schnittpunkt ist wegen g(1) = 4/1 = 4 der Punkt S(4|1).

III. Wir bilden die 1. Ableitungen an der Stelle $x_0 = 1$ und erhalten:

$$f(x) = \frac{1}{8}(x^2 + 31) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{8} \cdot 2x = \frac{1}{4}x \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$g(x) = \frac{4}{x} = 4x^{-1} \Rightarrow g'(x) = -4x^{-2} = -\frac{4}{x^2} \Rightarrow g'(1) = -\frac{4}{1^2} = -4.$$

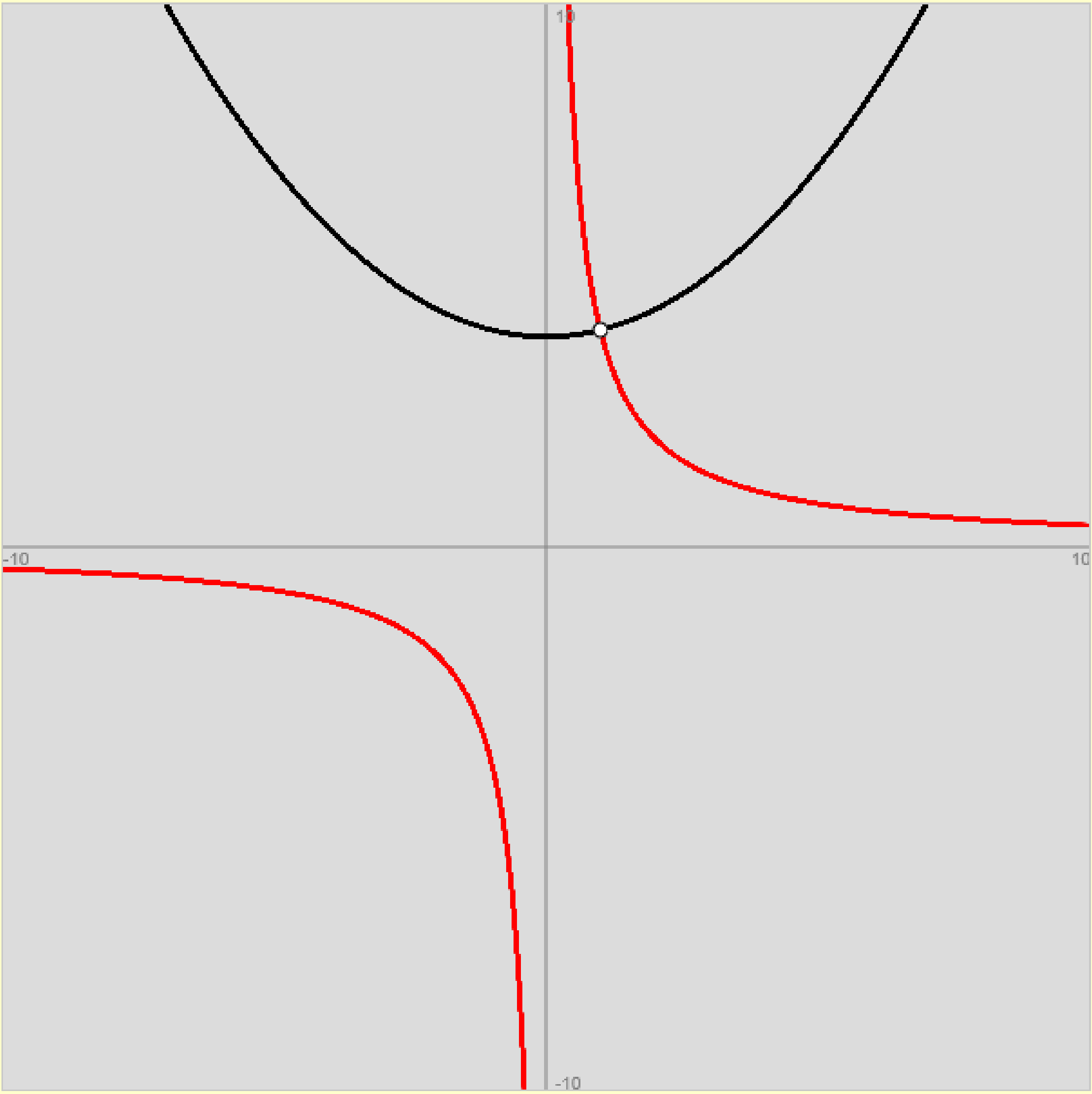
Nun gilt, wie wir leicht sehen:

$$f'(1) \cdot g'(1) = \frac{1}{4} \cdot (-4) = -1,$$

so dass die Orthogonalitätsbedingung greift. Die Funktionen f(x) und g(x) stehen in der Tat senkrecht im Schnittpunkt S(1|4) aufeinander (siehe auch die Abbildung).

Wertetabelle:

x	f(x)=g(x)	Schnittpunkte
1	4	(1) Schnittpunkt S(1|4), Schnittwinkel = 90°



Funktion: f(x) = 0.125*x^2+3.875

Funktion: g(x) = 4/x

www.michael-buhlmann.de / 11.2016 / Aufgabe 285