

Mathematikaufgaben

> Vektorrechnung

> Skalarprodukt

Aufgabe: Berechne das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}$. Wie groß ist der

Winkel zwischen den beiden Vektoren?

Lösung: I. Für die Berechnung des Skalarprodukts gilt die Formel:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right| \cdot \cos \varphi = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Hieraus folgt für den Winkel zwischen den Vektoren:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

II. Das Skalarprodukt bestimmt sich als:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix} = 10 \cdot (-2) + (-4) \cdot 11 + 3 \cdot (-5) = -20 - 44 - 15 = -79.$$

III. Der Winkel errechnet sich mit:

$$\cos \varphi = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -5 \end{pmatrix} \right|} = \frac{10 \cdot (-2) + (-4) \cdot 11 + 3 \cdot (-5)}{\sqrt{10^2 + 4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 11^2 + 5^2}} = \frac{-79}{\sqrt{125} \cdot \sqrt{150}} = -0,5769$$

als:

$$\varphi = \cos^{-1}(-0,5769) = 125,2^\circ$$

und somit als stumpfer Winkel.