Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Statistik/Stochastik
> Binomialverteilung, Normalverteilung

Aufgabe: Honigmelonen der Sorte „Honey" haben ein Durchschnittsgewicht von 2,2 Kilogramm (kg). Rund zwei Drittel der Gewichte ausgereifter Melonen liegen in einem Bereich, wo das Gewicht einer Melone vom Durchschnittsgewicht um bis zu rund 400 Gramm (g) abweicht.

a) Das Gewicht von Honigmelonen der Sorte „Honey" soll als normalverteilt angenommen werden. Gib Erwartungswert μ und Standardabweichung σ an. Skizziere die zur so bestimmten Normalverteilung gehörende Dichtefunktion $\varphi_{\mu,\sigma}$.

b) Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

A: Das Gewicht einer Honigmelone liegt unter 2 kg.
B: Eine Honigmelone wiegt höchstens 1500 g.
C: Eine Honigmelone ist mehr als 2,5 kg schwer.
D: Eine Honigmelone wiegt zwischen 1500 und 2500 g.
E: Das Gewicht einer Honigmelone weicht um bis zu 0,5 kg vom Durchschnittsgewicht ab.
F: Das Gewicht einer Honigmelone weicht um mindestens 700 g vom Durchschnittsgewicht ab.

c) Honigmelonen, die ein Gewicht haben, das um mindestens 700 g vom Durchschnittsgewicht abweicht, gelangen aus geschmacklichem Gründen und Gründen des Transports nicht in den Verkauf. Zwanzig Honigmelonen einer Ernte werden überprüft, ob sie verkauft werden können oder nicht. Berechne dazu die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

G: Genau drei Honigmelonen können nicht verkauft werden.
H: 15 Honigmelonen sind zum Verkauf geeignet.
I: Maximal fünf Honigmelonen können nicht verkauft werden.
J: Mehr als zwei Honigmelonen können nicht verkauft werden.
K: Zwischen 14 und 18 Honigmelonen sind zum Verkauf geeignet.
L: Weniger als 12 oder mindestens 15 Honigmelonen gelangen in den Verkauf.

Wie viel Honigmelonen gelangen im Durchschnitt nicht in den Verkauf?

d) Wie viel Honigmelonen müssen überprüft werden, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Melone zu finden, die nicht verkauft werden kann, über 90 Prozent liegt?

e) Eine Weiterzüchtung der Honigmelone „Honey" führt auf die Sorte „Honey 2.1". Diese zeichnet sich dadurch aus, dass bei einer Auswahl von zwanzig Melonen im Durchschnitt nur 1,2 Melonen für den Verkauf ungeeignet sind bei einem Durchschnittsgewicht von 2,2 Kilogramm. Wie groß ist damit die Wahrscheinlichkeit, dass eine Melone dieser Sorte in den Verkauf gelangt? Wie sehen bei der Sorte „Honey 2.1" die normalverteilten Gewichte der Melonen aus?

Lösung: a) I. Die Gaußsche Glockenkurve ist eine von reellen Parametern μ und σ (>0) abhängige Schar von reellwertigen Funktionen $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Die Eigenschaften der Funktionen $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ führen zu deren Verwendung in der Stochastik, stellt doch jede Funktion $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte (Gauß-Funktion) einer sog. normalverteilten (gauß-verteilten) stetigen Zufallsvariablen X dar: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ als Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ. Der Parameter μ verschiebt die Dichtefunktion (nach rechts: μ>0; nach links: μ<0), der Parameter σ (>0) steht für die Breite der Dichtefunktion (schmaler: $\sigma<1$; breiter: $\sigma>1$). Ist $\mu=0$ und $\sigma=1$, so liegt die Standardnormalverteilung N(0; 1) vor. Dabei lassen sich gemäß der Transformationsregel alle Normalverteilungen $N(\mu, \sigma^2)$ auf die Standardnormalverteilung N(0; 1) zurückführen. Dies gilt insbesondere für die Verteilungsfunktion $\Phi_{\mu,\sigma}(x)$ der normalverteilten Zufallsvariablen als Integralfunktion über die Dichte $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ mit ihren Wahrscheinlichkeiten:

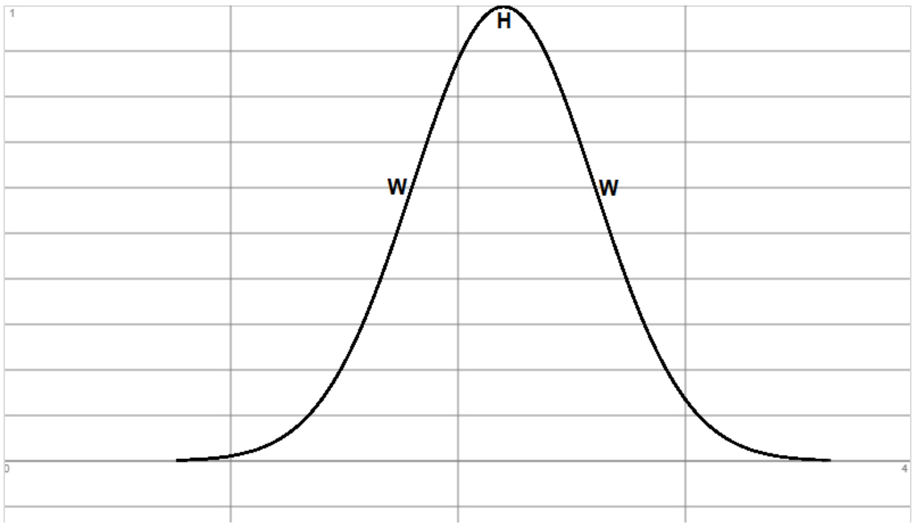
$$p(X \le x) = \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mu,\sigma}(z)dz\,.$$

Für eine $N(\mu; \sigma^2)$-verteilte stetige Zufallsvariable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ gelten noch die folgenden Rechenregeln:

$$p(X=a) = 0$$
$$p(a \le X) = p(a<X) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma}(a)$$
$$p(a \le X \le b) = p(a<X \le b) = p(a \le X<b) = p(a<X<b) = \Phi_{\mu,\sigma}(b) - \Phi_{\mu,\sigma}(a)$$
$$p(X \le b) = p(X<b) = \Phi_{\mu,\sigma}(b).$$

$p(a \le X \le b)$ z.B. gibt damit die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsvariable X einen Wert zwischen a und b annimmt, a, b reell.

II. Für das normalverteilte Gewicht der Honigmelonen als Zufallsgröße X wählen wir den Erwartungswert als Durchschnittsgewicht $\mu = 2,2$ kg. Die Standardabweichung ergibt sich aus der Überlegung, dass bei einer Normalverteilung das sog. 1σ-Intervall $[\mu-\sigma; \mu+\sigma]$ die Wahrscheinlichkeit $p(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma) \approx 0{,}683$ hat. 0,683 sind ungefähr zwei Drittel, so dass wir das 1σ-Intervall $[\mu-\sigma; \mu+\sigma]$ mit dem Bereich, wo das Gewicht einer Melone vom Durchschnittsgewicht um bis zu rund 400 Gramm abweicht, identifizieren. Folglich ist $\sigma = 400$ g $= 0,4$ kg. Die Zufallsgröße X, die das Gewicht der Melonen beschreibt, ist also normalverteilt mit $\mu = 2,2$ und $\sigma = 0,4$, also: $X \sim N(2,2; 0,16)$. Die Dichtefunktion $\varphi_{2,2;0,4}(x)$ hat demgemäß das Aussehen:



mit dem Hochpunkt H(2,2|1) und den Wendepunkten $W_1(1,8|0,6)$, $W_2(2,6|0,6)$.

b) Mit der Zufallsgröße $X \sim N(2,2; 0,16)$ berechnen wir die Wahrscheinlichkeiten:

$p(A) = p(X<2) = 0.308537$
$p(B) = p(X \le 1,5) = 0.040059$
$p(C) = p(X>2,5) = 0.226627$
$p(D) = p(1,5 \le X \le 2,5) = 0.733313$
$p(E) = p(2,2-0,5 \le X \le 2,2+0,5) = p(1,7 \le X \le 2,7) = 0.7887$
$p(F) = p(X \le 2,2-0,7 \text{ oder } X \ge 2,2+0,7) = p(X \le 1,5 \text{ oder } X \ge 2,9) = p(X \le 1,5) + p(X \ge 2,9) = 2 \cdot p(X \le 1,5) =$
$2 \cdot 0.040059 = 0.080118.$

c) I. Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (T = Treffer, N = Nichttreffer), der Grundwahrscheinlichkeit p als Trefferwahrscheinlichkeit, der Anzahl n der Experimentwiederholung „mit Zurücklegen“. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer bei n-maliger Wiederholung des Experiments an. Sie ist B(n; p)-binomialverteilt für die mit den Parametern n (Anzahl der Versuchswiederholungen) und p (Trefferwahrscheinlichkeit) und genügt der Bernoulliformel:

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\text{, k = 0, 1, …n.}$$

mit $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ als Binomialkoeffizienten. Als Rechenregeln im Zusammenhang mit der Bernoulliformel ergeben sich:

$$p(X=0) = (1-p)^n$$
$$p(X=n) = p^n$$
$$p(X\le k) = p(X=0) + p(X=1) + \ldots + p(X=k) = 1 - p(X>k)$$
$$p(X<k) = p(X\le k-1) = 1 - p(X\ge k)$$
$$p(X\ge k) = 1 - p(X\le k-1)$$
$$p(X>k) = p(X\ge k+1) = 1 - p(X\le k)$$
$$p(k_1\le X\le k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X\le k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1)$$
$$p(k_1\le X<k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X<k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1).$$

Bei einem Bernoulli-Experiment mit binomialverteilter Zufallsgröße X ~ B(n; p) gilt noch hinsichtlich des Erwartungswerts E(X):

$$E(X) = \mu = np.$$

II. Honigmelonen, die ein Gewicht haben, das um mindestens 700 g vom Durchschnittsgewicht abweicht, gelangen nicht in den Verkauf. Das betrifft wegen $p(X\le 1{,}5 \text{ oder } X\ge 2{,}9) = 0.080118$ (siehe b)) etwa 8 Prozent der Melonen. Wir gehen im Folgenden von einem Bernoulli-Experiment mit Y als binomialverteilter Zufallsgröße. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist dann p = 0,08 bei einer Auswahl von zwanzig Melonen mit n = 20, also: Y ~ B(20; 0,08). Die zu berechnenden Wahrscheinlichkeiten ergeben sich wie folgt:

$p(G) = p(Y=3) = 0.141438$
$p(H) = p(Y=5) = 0.014545$
(15 Melonen für den Verkauf entsprechen 5, die nicht in den Verkauf gelangen)
$p(I) = p(Y\le 5) = 0.996201$
$p(J) = p(Y>2) = 1 - p(Y\le 2) = 1 - 0.787946 = 0.212054.$

Wir rechnen nun der Einfachheit halber mit der binomialverteilten Zufallsgröße Y_1 ~ B(20; 0,92) bei einer Trefferwahrscheinlichkeit $p_1 = 1 - p = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$ die Wahrscheinlichkeiten für in den Verkauf gelangende Melonen aus:

$p(K) = p(14\le Y_1\le 18) = p(Y_1\le 18) - p(Y_1\le 13) = 0.483144 - 0.000638 = 0.482506$
$p(L) = p(Y_1<12 \text{ oder } Y_1\ge 15) = p(Y_1<12) + p(Y_1\ge 15) = p(Y_1\le 11) + 1 - p(Y_1\le 14) =$
$0.00001 + 1 - 0.0038 = 0.99621.$

III. Mit der Zufallsgröße Y ~ B(20; 0,08) bei Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,08 und n = 20 ermitteln den Erwartungswert E(Y):

$E(Y) = \mu = np = 20\cdot 0{,}08 = 1{,}6.$

D.h.: Im Durchschnitt sind 1,6 Melonen für den Verkauf ungeeignet.

d) Es soll bei Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,08 und mit Zufallsgröße Y_2 ~ B(n; 0,08) die Anzahl n der auszuwählenden Melonen bestimmt werden, damit:

$p(Y_2\ge 1) \ge 0{,}9$ (*)

gilt. Wir formen (*) wie folgt um:

$p(Y_2\ge 1) \ge 0{,}9 \Leftrightarrow 1 - p(Y_2=0) \ge 0{,}9 \Leftrightarrow - p(Y_2=0) \ge -0{,}1 \Leftrightarrow p(Y_2=0) \le 0{,}1.$

Wir werten die folgende Wahrscheinlichkeitstabelle aus:

n =	**p(X=0) =**
26	0.114415
27	0.105262
28	0.096841
29	0.089094

Es gilt: $n \geq 28$. Es sind also mindestens 28 Melonen zu überprüfen.

e) I. Unter der Voraussetzung einer binomialverteilten Zufallsvariable $Z \sim B(n; p)$ gilt bei $n = 20$ und $\mu = np = 1{,}2$ für den Erwartungswert:

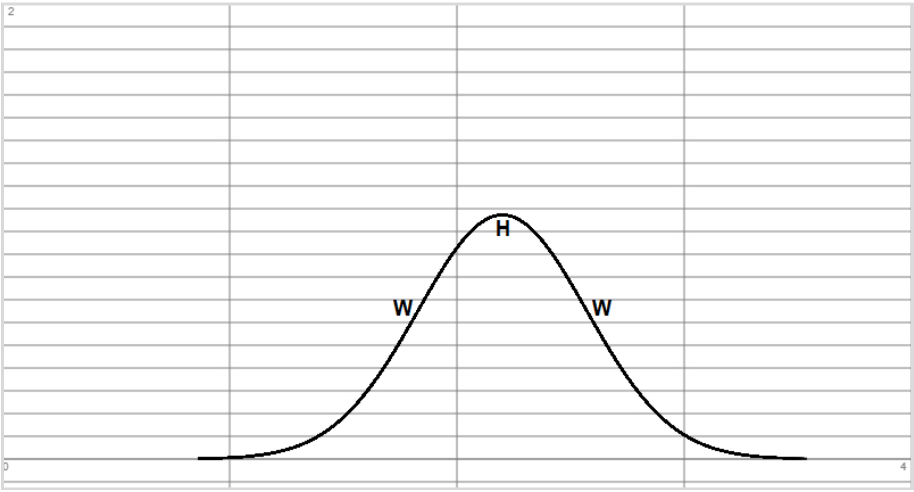
$\mu = np \Rightarrow 1{,}2 = 20p \Rightarrow p = 0{,}06$.

Die Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}06$ der Sorte „Honey 2.1“ ist damit kleiner als die für die Sorte „Honey“ mit $p = 0{,}08$.

II. Wir übertragen die Erkenntnisse der Binomial- auf die Normalverteilung und haben zunächst für die normalverteilte Zufallsgröße $Z_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, die wir nun bzgl. der Gewichte der Melonen der Sorte „Honey 2.1“ definieren, den Erwartungswert $\mu_1 = 2{,}2$, da das Durchschnittsgewicht der beiden Sorten gleich ist. Zudem muss nun gelten wegen der Trefferwahrscheinlichkeit $p = 0{,}06$ der binomialverteilten Zufallsgröße Z und gemäß der oben erfolgten Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses F (siehe b)) sowie auf Grund der Symmetrie der Gaußschen Glockenkurve bzgl. $\mu_1 = 2{,}2$:

$p(Z_1 \leq 1{,}5 \text{ oder } Z_1 \geq 2{,}9) = p(Z_1 \leq 1{,}5) + p(Z_1 \geq 2{,}9) = 2 \cdot p(Z_1 \leq 1{,}5) = 0{,}06 \Rightarrow p(Z_1 \leq 1{,}5) = 0{,}03$ (**).

Es muss damit eine Standardabweichung σ_1 gefunden werden, die (**) erfüllt. Probieren ergibt: $\sigma_1 = 0{,}372$ mit wie erwartet etwas kleinerem σ_1 als die Standardabweichung $\sigma = 0{,}4$ der normalverteilten Zufallsvariable X hinsichtlich der Honigmelonen der Sorte „Honey“ (siehe a)). Die Dichtefunktion $\varphi_{2,2;0,372}(x)$ hat demgemäß das Aussehen:



mit dem Hochpunkt $H(2{,}2|1{,}072)$ und den Wendepunkten $W_1(1{,}83|0{,}654)$, $W_2(2{,}57|0{,}654)$.

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1427