Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Statistik/Stochastik
> Bernoulli-Experiment

Aufgabe: Die Zufallsvariable X zu einem Bernoulli-Experiment zählt die Anzahl der Treffer und ist binomialverteilt mit n = 17 und p = 0,6. Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

a) p(X=8)	b) p(X=12)	c) p(X≤4)	d) p(X≤9)
e) p(X<13)	f) p(X≠10)	g) p(X>5)	h) p(X≥14)
i) p(6≤X≤11)	j) p(2<X≤5)	k) p(X≤10 *oder* X≥15)	l) p(X<4 *oder* X>10)

Lösung: I. Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (T = Treffer, N = Nichttreffer), der Grundwahrscheinlichkeit p als Trefferwahrscheinlichkeit, der Anzahl n der Experimentwiederholung „mit Zurücklegen". Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer bei n-maliger Wiederholung des Experiments an. Sie ist B(n; p)-binomialverteilt für die mit den Parametern n (Anzahl der Versuchswiederholungen) und p (Trefferwahrscheinlichkeit) und genügt der Bernoulliformel:

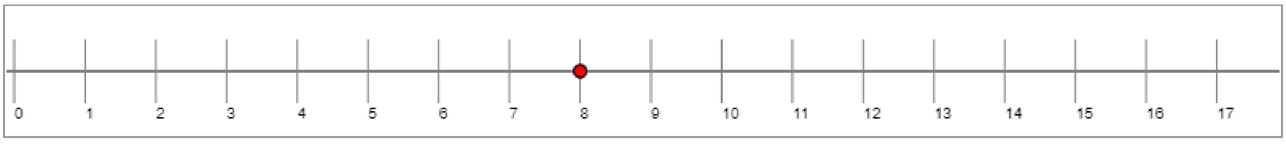
$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\text{, k = 0, 1, …n.}$$

mit $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ als Binomialkoeffizienten. Als Rechenregeln im Zusammenhang mit der Bernoulliformel ergeben sich:

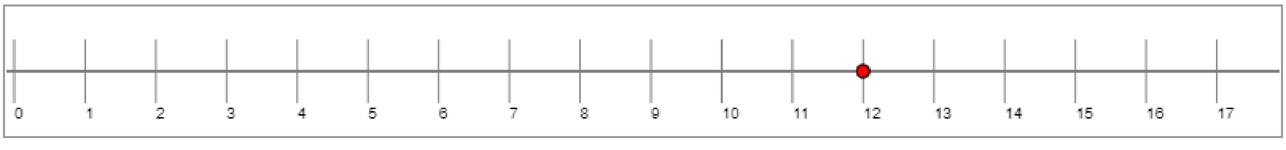
$$p(X=0) = (1-p)^n$$
$$p(X=n) = p^n$$
$$p(X\le k) = p(X=0) + p(X=1) + \ldots + p(X=k) = 1 - p(X>k)$$
$$p(X<k) = p(X\le k-1) = 1 - p(X\ge k)$$
$$p(X\ge k) = 1 - p(X\le k-1)$$
$$p(X>k) = p(X\ge k+1) = 1 - p(X\le k)$$
$$p(k_1\le X\le k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X\le k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1)$$
$$p(k_1\le X<k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X<k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1).$$

II. Unter Verwendung der Bernoulliformel und mit X als binomialverteilter Zufallsvariable bei Anzahl n = 17 der Versuchswiederholungen und Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,6 haben wir die folgende auch grafische Darstellung der Wahrscheinlichkeiten:

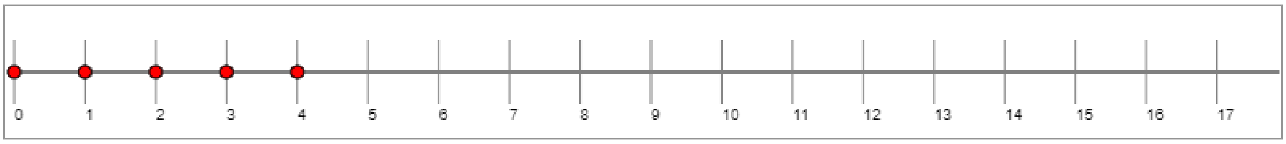
a) p(X=8) = 0.10703723550474242



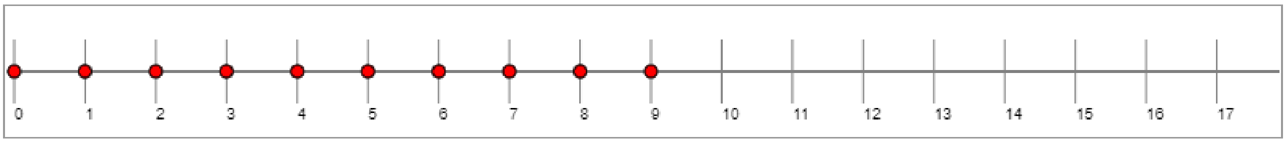
b) p(X=12) = 0.1379320739345203



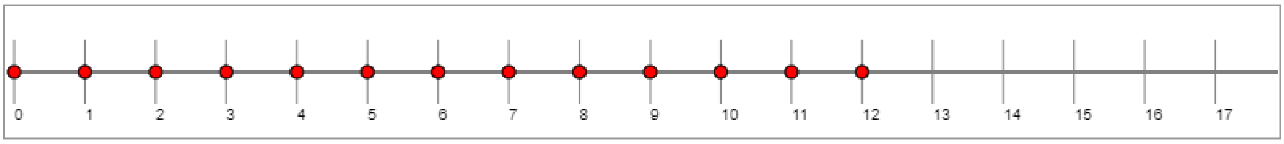
c) $p(X\leq4) = 0.0025213605511168018$



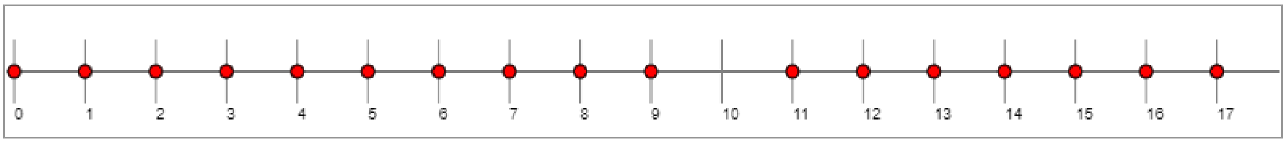
d) $p(X\leq9) = 0.3594923429330945$



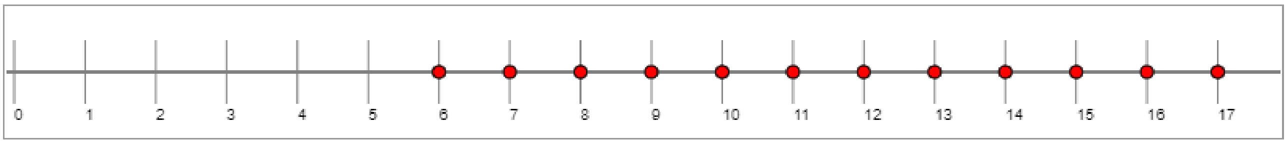
e) $p(X<13) = p(X\leq12) = 0.874000872688845$



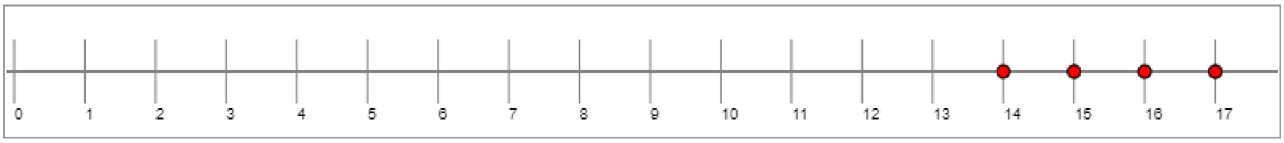
f) $p(X\neq10) = 1 – p(X=10) = 0.8073329760914637$



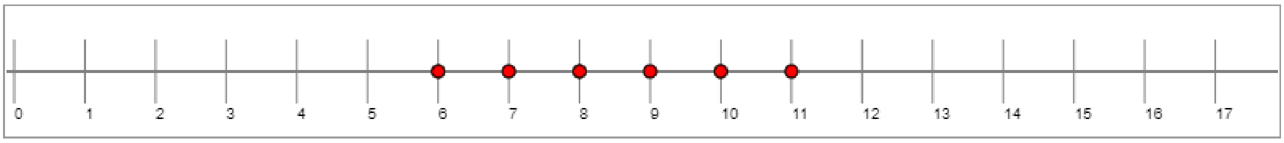
g) $p(X>5) = p(X\geq6) = 1 – p(X\leq5) = 0.9894057974444851$



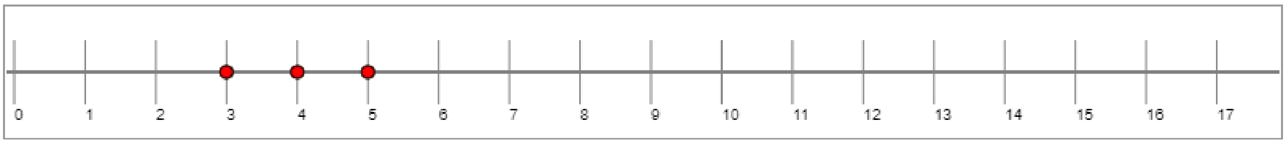
h) $p(X\geq14) = 1 – p(X\leq13) = 0.04642293081047038$



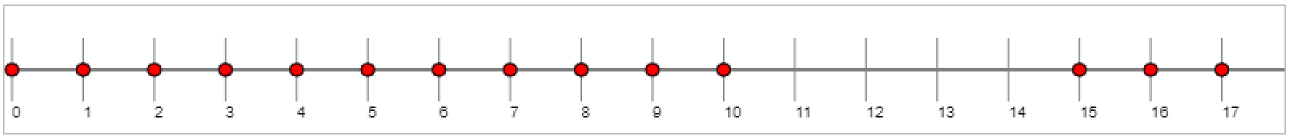
i) $p(6\leq X\leq11) = p(X\leq11) – p(X\leq5) = 0.7254745961988096$



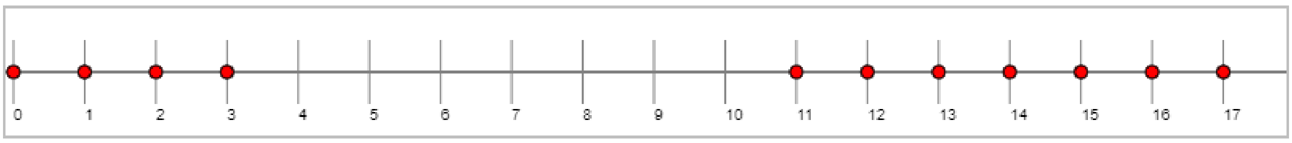
j) $p(2<X\leq5) = p(3\leq X\leq5) = p(X\leq5) – p(X\leq2) = 0.010537079490478085$



k) $p(X\leq10$ *oder* $X\geq15) = p(X\leq10) + p(X\geq15) = p(X\leq10) + 1 – p(X\leq14) = 0.5644782134375218$



l) $p(X<4$ *oder* $X>10) = p(X\leq3) + p(X\geq11) = p(X\leq3) + 1 – p(X\leq10) = 0.4482920342211788$



www.michael-buhlmann.de / 07.2021 / Aufgabe 1467