Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Statistik/Stochastik
> Bernoulli-Experiment

Aufgabe: In einer Urne befinden sich zwei rote und acht schwarze Kugeln. Es wird mit Zurücklegen 25 Mal eine Kugel gezogen und dabei die Anzahl der gezogenen roten Kugeln gezählt.

a) Erkläre, warum es sich bei dem Zufallsexperiment um ein Bernoulli-Experiment handelt. Gib die Trefferwahrscheinlichkeit und die Anzahl der Versuchswiederholungen an.

b) Berechne die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

A: Es wird genau drei Mal eine rote Kugel gezogen.
B: Die Anzahl der gezogenen roten Kugeln ist nicht 12.
C: Es wird höchstens 10 Mal eine rote Kugel gezogen.
D: Es werden weniger als 15 rote Kugeln gezogen.
E: Es werden mindestens acht rote Kugeln gezogen.
F: Die Anzahl der gezogenen roten Kugeln beträgt mehr als 20.
G: Die Anzahl der gezogenen roten Kugeln liegt zwischen 14 und 22.
H: Es werden mehr als 10 und höchstens 15 rote Kugeln gezogen.
I: Es werden mindestens 10 und weniger als 15 rote Kugeln gezogen.
J: Es werden mehr als 5 und weniger als 15 rote Kugeln gezogen.
K: Die Anzahl der gezogenen roten Kugeln ist höchstens 8 oder mindestens 14.
L: Die Anzahl der gezogenen roten Kugeln ist weniger als 8 oder mindestens 14.
M: Die Anzahl der gezogenen roten Kugeln ist höchstens 8 oder mehr als 14.
N: Die Anzahl der gezogenen roten Kugeln ist weniger als 8 oder mehr als 14.

Lösung: a) I. Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (T = Treffer, N = Nichttreffer), der Grundwahrscheinlichkeit p als Trefferwahrscheinlichkeit, der Anzahl n der Experimentwiederholung „mit Zurücklegen". Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer bei n-maliger Wiederholung des Experiments an. Sie ist B(n; p)-binomialverteilt für die mit den Parametern n (Anzahl der Versuchswiederholungen) und p (Trefferwahrscheinlichkeit) und genügt der Bernoulliformel:

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$, k = 0, 1, …n.

mit $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ als Binomialkoeffizienten. Als Rechenregeln im Zusammenhang mit der Bernoulliformel ergeben sich:

$$p(X=0) = (1-p)^n$$
$$p(X=n) = p^n$$
$$p(X\le k) = p(X=0) + p(X=1) + \ldots + p(X=k) = 1 - p(X>k)$$
$$p(X<k) = p(X\le k-1) = 1 - p(X\ge k)$$
$$p(X\ge k) = 1 - p(X\le k-1)$$
$$p(X>k) = p(X\ge k+1) = 1 - p(X\le k)$$
$$p(k_1\le X\le k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X\le k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1)$$
$$p(k_1\le X<k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X<k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1).$$

II. Für die zu berechnenden Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A bis E können wir von einem Bernoulli-Experiment mit Zufallsgröße X ausgehen, wenn wir die Dichotomien „rot“ – „nicht rot“ (Ereignis A, E), „weiß“ – „nicht weiß“ (Ereignis B, C) und „blau“ – „nicht blau“ (Ereignis D) betrachten. In jedem Fall ergeben sich die nachstehenden Wahrscheinlichkeitsbäume und Wahrscheinlichkeiten.

II. X sei die Zufallsvariable, die die Anzahl der gezogenen roten Kugeln zählt (Treffer: rot, Nichttreffer: schwarz). Dann ist X als Teil des Bernoulli-Experiments „Ziehen von roten Kugeln“ binomialverteilt mit der Trefferwahrscheinlichkeit

$p = \frac{2}{10} = 0{,}2$

(2 rote Kugeln unter 10 Kugeln insgesamt) bei

$n = 25$

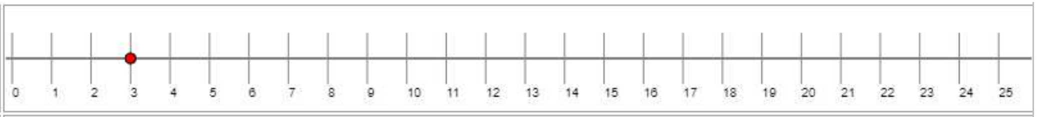
Versuchswiederholungen (25-maliges Ziehen einer Kugel mit Zurücklegen). Es gilt damit:
$X \sim B(25; 0{,}2)$.

b) Die Wahrscheinlichkeiten p(X=k) errechnen sich mit der Bernoulliformel, die kumulierten Wahrscheinlichkeiten $p(X\le k)$ o.ä. als Summe der Wahrscheinlichkeiten p(X=k), k=0, … 25. Wir haben dann für die Ereignisse A bis N mit:

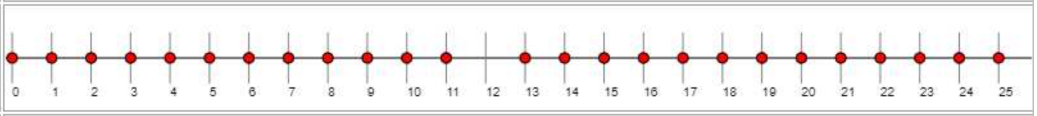
$p(A) = p(X=3)$
$p(B) = p(X\neq 12)$
$p(C) = p(X\le 10)$
$p(D) = p(X<15)$
$p(E) = p(X\ge 8)$
$p(F) = p(X>20)$
$p(G) = p(14\le X\le 22)$
$p(H) = p(10<X\le 15)$
$p(I) = p(10\le X<15)$
$p(J) = p(5<X<15)$
$p(K) = p(X\le 8$ *oder* $X\ge 14)$
$p(L) = p(X<8$ *oder* $X\ge 14)$
$p(M) = p(X\le 8$ *oder* $X>14)$
$p(N) = p(X<8$ *oder* $X>14)$

bei p = 0,2 und n = 25 die folgende auch grafische Darstellung der Wahrscheinlichkeiten:

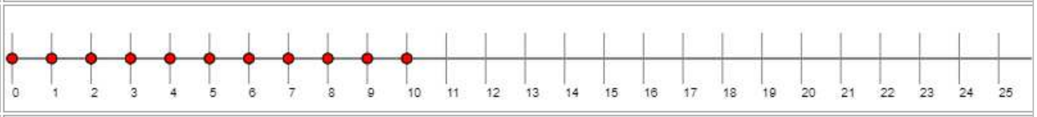
p(X=3) =
0.1357680363825025



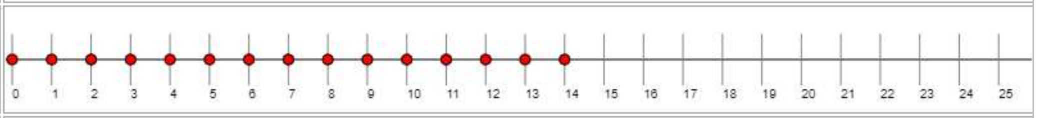
p(X≠12) =
0.9988289965428893



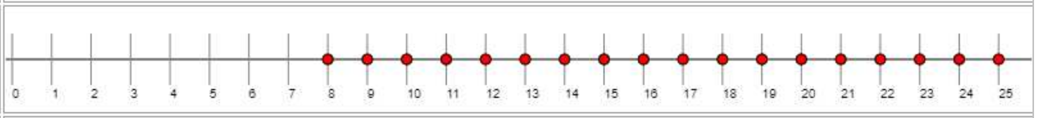
p(X≤10) =
0.9944450795125266



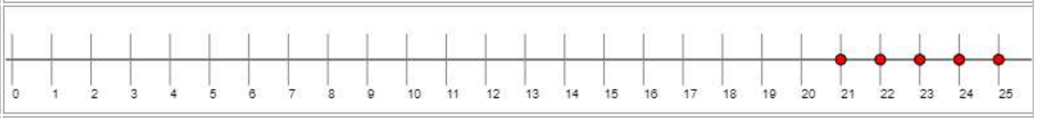
p(X<15) =
0.9999864351577828



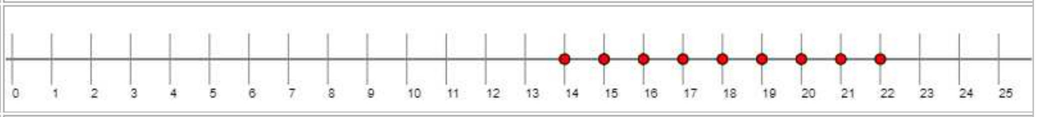
p(X≥8) =
0.10912279599503052



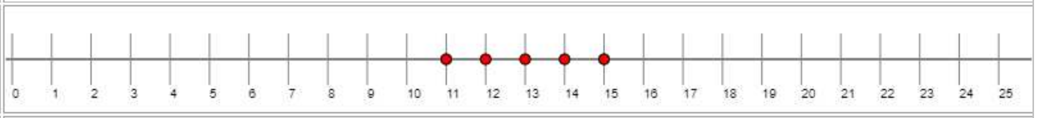
p(X>20) =
1.1376633525043215e-11



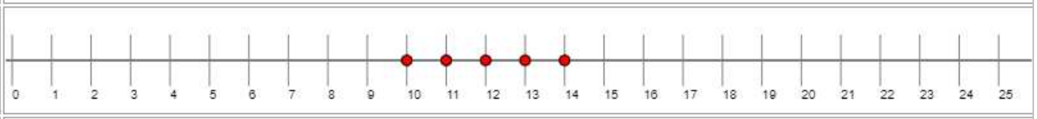
p(14≤X≤22) =
0.00007629717026169799



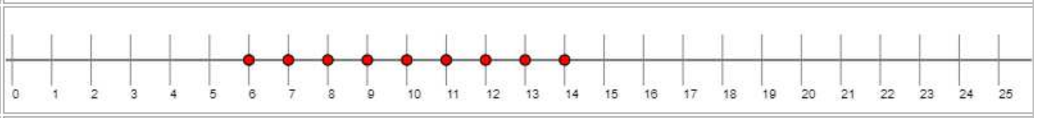
p(10<X≤15) =
0.005552856572067095



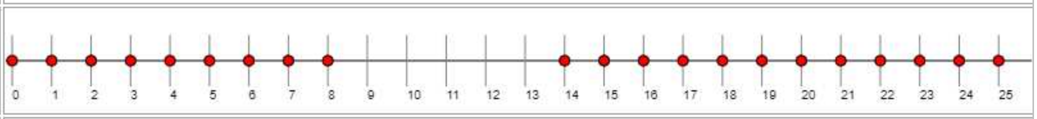
p(10≤X<15) =
0.017318304699627068



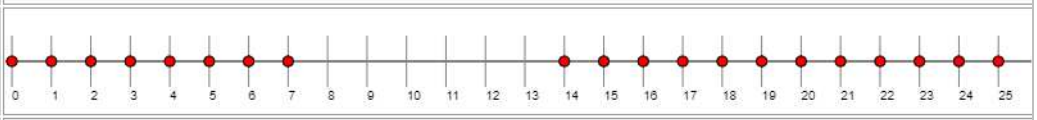
p(5<X<15) =
0.3832970233784126



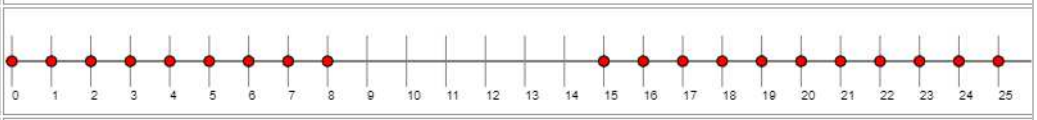
p(X≤8 *oder* X≥14) =
0.9533020549925052



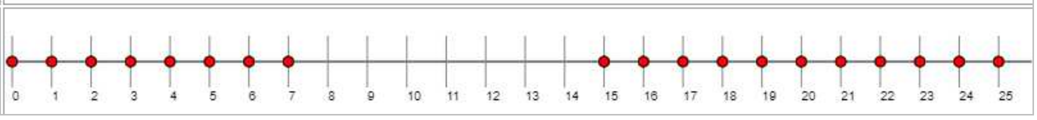
p(X<8 *oder* X≥14) =
0.8909535011752476



p(X≤8 *oder* X>14) =
0.9532393226644457



p(X<8 *oder* X>14) =
0.8908907688471881



www.michael-buhlmann.de / 07.2021 / Aufgabe 1468