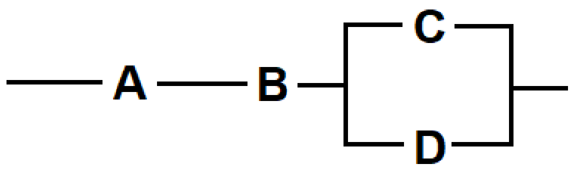
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Statistik/Stochastik
> Exponentialverteilung

Aufgabe: Ein elektrischer Schaltkreis enthält vier Komponenten A, B, C, D, die wie folgt in Reihe oder parallel geschaltet sind:



Die konstanten Ausfallraten der jeweiligen Komponenten betragen: λ_A = 0,05, λ_B = 0,02, λ_C = 0,05, λ_D = 0,1 pro Jahr. Es soll die Wahrscheinlichkeit des Funktionierens des Schaltkreises über den Zeitraum von einem Jahr berechnet werden, zudem die Ausfallrate des gesamten Systems.

Lösung: I. Konstante Ausfallraten treten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Zusammenhang mit der (stetigen) Exponentialverteilung für t≥0 auf. Für eine konstante Ausfallrate λ ergibt sich dabei als Funktion der Ausfalldichte:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \ (t \geq 0)$$

aus der (durch Integration) die Verteilungsfunktion der Ausfallwahrscheinlichkeit folgt:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \ (t \geq 0).$$

Die Funktion der Überlebenswahrscheinlichkeit (als Gegenwahrscheinlichkeit) ist folglich:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} \ (t \geq 0).$$

Ist zudem die Zufallsvariable X exponentialverteilt, misst sie also den Zeitraum bis zum nächsten Ausfall bei einer Ausfallrate λ, so gilt für Erwartungswert und Varianz bzw. Standardabweichung:

$$\text{Erwartungswert } E(X) = \frac{1}{\lambda}, \text{ Varianz } Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \text{Standardabweichung } \sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

II. Die Mathematik hält die Aussagenlogik über die Booleschen Gesetze bereit, und zwar:

Konjunktion (und, ∧)		
A	**B**	**A ∧ B**
wahr	wahr	wahr
falsch	wahr	falsch
wahr	falsch	falsch
falsch	falsch	falsch
Disjunktion (oder, ∨)		
A	**B**	**A ∨ B**
wahr	wahr	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
falsch	falsch	falsch

Können A und B als Komponenten eines Systems interpretiert werden und sind $R_A(t)$, $R_B(t)$ deren Überlebenswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt t≥0, so gelten (auch wegen des Additionssatzes für

Wahrscheinlichkeiten [$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$] und der stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissen [$p(A \cap B) = p(A)p(B)$]):

$$R_{A \wedge B}(t) = R_A(t) \cdot R_B(t),\ R_{A \vee B}(t) = R_A(t) + R_B(t) - R_A(t) \cdot R_B(t).$$

III. Aus den konstanten Ausfallraten $\lambda_A = 0{,}05$, $\lambda_B = 0{,}02$, $\lambda_C = 0{,}05$, $\lambda_D = 0{,}1$ errechnen wir zunächst die <u>Überlebenswahrscheinlichkeiten</u> der vier Komponenten A, B, C, D gemäß der Exponentialverteilung mit:

$R_A(1) = e^{-0{,}05} = 0{,}9512 = 95{,}12\ \%$
$R_B(1) = e^{-0{,}02} = 0{,}9802 = 98{,}02\ \%$
$R_C(1) = e^{-0{,}05} = 0{,}9512 = 95{,}12\ \%$
$R_D(1) = e^{-0{,}1} = 0{,}9048 = 90{,}48\ \%$.

IV. Der Schaltkreis mit den vier Komponenten A, B, C, D ist aussagenlogisch als:

$A \wedge B \wedge (C \vee D)$

darstellbar. Daraus folgt:

$R_{C \vee D}(1) = R_C(1) + R_D(1) - R_C(1) \cdot R_D(1) = 0{,}9512 + 0{,}9048 - 0{,}9512 \cdot 0{,}9048 = 0{,}9954 \Rightarrow$
$R_{A \wedge B \wedge (C \vee D)}(1) = R_A(1) \cdot R_B(1) \cdot R_{C \vee D}(1) = 0{,}9512 \cdot 0{,}9802 \cdot 0{,}9954 = 0{,}9281 = 92{,}81\ \% = R(1)$

als gesuchte <u>Wahrscheinlichkeit für das Funktionieren</u> (Überlebenswahrscheinlichkeit) des Schaltkreises. Die Ausfallwahrscheinlichkeit beim Schaltkreis beträgt im Übrigen:

$F(1) = 1 - R(1) = 1 - 0{,}9281 = 0{,}0719 = 7{,}19\ \%$.

V. Aus der Überlebenswahrscheinlichkeit des Schaltkreises $R(1) = 0{,}9281$ lässt sich vermöge der Beziehung $R(t) = e^{-\lambda t}$ die Ausfallrate für das System berechnen. Es gilt damit:

$R(1) = e^{-\lambda} \Leftrightarrow 0{,}9281 = e^{-\lambda} \Leftrightarrow -\lambda = \ln(0{,}9281) = -0{,}0746 \Leftrightarrow \lambda = 0{,}0746$.

Die <u>Ausfallrate</u> des gesamten Systems beträgt: $\lambda = 0{,}0746$ mit der Überlebenswahrscheinlichkeit $R(1) = e^{-0{,}0746}$ sowie der Ausfallwahrscheinlichkeit $F(1) = 1 - e^{-0{,}0746} = 0{,}0719$.

www.michael-buhlmann.de / 01.2023 / Aufgabe 1769