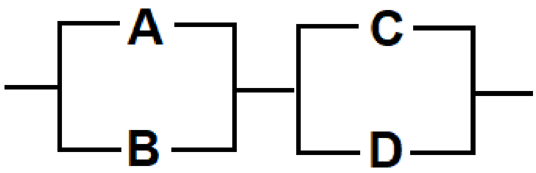
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Statistik/Stochastik
> Exponentialverteilung

Aufgabe: Ein elektrischer Schaltkreis enthält vier Komponenten A, B, C, D, die wie folgt in Reihe oder parallel geschaltet sind:



Die konstante Ausfallrate aller Komponenten beträgt: $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_C = \lambda_D = \lambda$ pro Zeiteinheit. Es soll die Wahrscheinlichkeit des Funktionierens des Schaltkreises über den Zeitraum von einem Jahr berechnet werden, den Erwartungswert, zudem die Ausfallrate des gesamten Systems (in Abhängigkeit von λ).

Lösung: I. Konstante Ausfallraten treten in der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Zusammenhang mit der (stetigen) Exponentialverteilung für t≥0 auf. Für eine konstante Ausfallrate λ ergibt sich dabei als Funktion der Ausfalldichte:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \ (t \geq 0)$$

aus der (durch Integration) die Verteilungsfunktion der Ausfallwahrscheinlichkeit folgt:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \ (t \geq 0).$$

Die Funktion der Überlebenswahrscheinlichkeit (Zuverlässigkeitsfunktion; als Gegenwahrscheinlichkeit) ist folglich:

$$R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t} \ (t \geq 0).$$

Ist zudem die Zufallsvariable X exponentialverteilt, misst sie also den Zeitraum bis zum nächsten Ausfall bei einer Ausfallrate λ, so gilt für Erwartungswert und Varianz bzw. Standardabweichung:

$$\text{Erwartungswert } E(X) = \frac{1}{\lambda}, \text{ Varianz } Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \text{Standardabweichung } \sigma = \frac{1}{\lambda}.$$

Zum Erwartungswert der Exponentialverteilung sei noch angemerkt, dass:

$$E(X) = \int_0^\infty tf(t)dt = \int_0^\infty (1 - F(t))dt = \int_0^\infty R(t)dt$$

gilt.

II. Die Mathematik hält die Aussagenlogik über die Booleschen Gesetze bereit, und zwar:

Konjunktion (und, ∧)		
A	**B**	**A ∧ B**
wahr	wahr	wahr
falsch	wahr	falsch
wahr	falsch	falsch
falsch	falsch	falsch

Disjunktion (oder, $\vee$)		
A	**B**	**$A \vee B$**
wahr	wahr	wahr
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
falsch	falsch	falsch

Können A und B als Komponenten eines Systems interpretiert werden und sind $R_A(t)$, $R_B(t)$ deren Überlebenswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt t≥0, so gelten (auch wegen des Additionssatzes für Wahrscheinlichkeiten [$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$] und der stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissen [$p(A \cap B) = p(A)p(B)$]):

$$R_{A \wedge B}(t) = R_A(t) \cdot R_B(t),\ R_{A \vee B}(t) = R_A(t) + R_B(t) - R_A(t) \cdot R_B(t).$$

III. Aus den konstanten Ausfallraten $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_C = \lambda_D = \lambda$ errechnen wir zunächst die Überlebenswahrscheinlichkeiten der vier Komponenten A, B, C, D gemäß der Exponentialverteilung mit:

$R_A(t) = e^{-\lambda t}$
$R_B(t) = e^{-\lambda t}$
$R_C(t) = e^{-\lambda t}$
$R_D(t) = e^{-\lambda t}$.

IV. Der Schaltkreis mit den vier Komponenten A, B, C, D ist aussagenlogisch als:

$(A \vee B) \wedge (C \vee D)$

darstellbar. Daraus folgt:

$R_{A \vee B}(t) = R_A(t) + R_B(t) - R_A(t) \cdot R_B(t) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda t} = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$
$R_{C \vee D}(t) = R_C(t) + R_D(t) - R_C(t) \cdot R_D(t) = e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda t} = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$
$R_{(A \vee B) \wedge (C \vee D)}(t) = R_{A \vee B}(t) \cdot R_{C \vee D}(t) = (2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t})(2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}) = 4e^{-2\lambda t} - 4e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t} = R(t)$

als gesuchte Wahrscheinlichkeit für die Zuverlässigkeit (Überlebenswahrscheinlichkeit) des Schaltkreises.

V. Ist X die Zufallsvariable, die mit der Überlebenswahrscheinlichkeit R(t) in Verbindung steht, so ist deren Erwartungswert:

$$E(x) = \int_0^\infty R(t)dt = \int_0^\infty (4e^{-2\lambda t} - 4e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t})dt = (*).$$

Das (uneigentliche) Integral (*) des Integranden (R(t) =) $h(t) = 4e^{-2\lambda t} - 4e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t}$ berechnet sich über die Stammfunktion $H(t) = \frac{4}{-2\lambda}e^{-2\lambda t} - \frac{4}{-3\lambda}e^{-3\lambda t} + \frac{1}{-4\lambda}e^{-4\lambda t} = -\frac{2}{\lambda}e^{-2\lambda t} + \frac{4}{3\lambda}e^{-3\lambda t} - \frac{1}{4\lambda}e^{-4\lambda t}$ sowie über den Grenzwert $\tau \to +\infty$:

$$(*) = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau (4e^{-2\lambda t} - 4e^{-3\lambda t} + e^{-4\lambda t})dt = \lim_{\tau \to \infty} \left[-\frac{2}{\lambda}e^{-2\lambda t} + \frac{4}{3\lambda}e^{-3\lambda t} - \frac{1}{4\lambda}e^{-4\lambda t}\right]_0^\tau =$$

$$\lim_{\tau \to \infty}\left[-\frac{2}{\lambda}e^{-2\lambda\tau} + \frac{4}{3\lambda}e^{-3\lambda\tau} - \frac{1}{4\lambda}e^{-4\lambda\tau}\right] - \left[-\frac{2}{\lambda}e^{-2\lambda\cdot 0} + \frac{4}{3\lambda}e^{-3\lambda\cdot 0} - \frac{1}{4\lambda}e^{-4\lambda\cdot 0}\right] =$$

$$0 - \left[-\frac{2}{\lambda}e^0 + \frac{4}{3\lambda}e^0 - \frac{1}{4\lambda}e^0\right] = -\left[-\frac{2}{\lambda} + \frac{4}{3\lambda} - \frac{1}{4\lambda}\right] = -\left[-\frac{11}{12\lambda}\right] = \frac{11}{12\lambda}.$$

Die Ausfallrate des Gesamtsystems beträgt somit: $\lambda_{ges} = \frac{12}{11}\lambda$, ist also etwas günstiger als Ausfallrate der einzelnen Komponenten.

www.michael-buhlmann.de / 01.2023 / Aufgabe 1776