Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Statistik/Stochastik
> Normalverteilung

Aufgabe: Die Körpergröße von Schülern einer bestimmten Schule folgt einer Normalverteilung mit einem Mittelwert von 1,70 m und einer Standardabweichung von 7 cm. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Schüler dieser Schule zwischen 1,60 m und 1,80 m groß ist?

Lösung: I. Die Gaußsche Glockenkurve ist eine von reellen Parametern μ und σ (>0) abhängige Schar von reellwertigen Funktionen $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$

Die Eigenschaften der Funktionen $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ führen zu deren Verwendung in der Stochastik, stellt doch jede Funktion $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte (Gauß-Funktion) einer sog. normalverteilten (gauß-verteilten) stetigen Zufallsvariablen X dar: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ als Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ. Der Parameter μ verschiebt die Dichtefunktion (nach rechts: μ>0; nach links: μ<0), der Parameter σ (>0) steht für die Breite der Dichtefunktion (schmaler: σ<1; breiter: σ>1). Ist μ=0 und σ=1, so liegt die Standardnormalverteilung N(0; 1) vor. Dabei lassen sich gemäß der Transformationsregel alle Normalverteilungen $N(\mu, \sigma^2)$ auf die Standardnormalverteilung N(0; 1) zurückführen. Dies gilt insbesondere für die Verteilungsfunktion $\Phi_{\mu,\sigma}(x)$ der normalverteilten Zufallsvariablen als Integralfunktion über die Dichte $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ mit ihren Wahrscheinlichkeiten:

$$p(X \le x) = \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mu,\sigma}(z)dz .$$

Für eine $N(\mu; \sigma^2)$-verteilte stetige Zufallsvariable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ gelten noch die folgenden Rechenregeln:

$$p(X=a) = 0$$
$$p(a\le X) = p(a<X) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma}(a)$$
$$p(a\le X\le b) = p(a<X\le b) = p(a\le X<b) = p(a<X<b) = \Phi_{\mu,\sigma}(b) - \Phi_{\mu,\sigma}(a)$$
$$p(X\le b) = p(X<b) = \Phi_{\mu,\sigma}(b).$$

$p(a\le X\le b)$ z.B. gibt damit die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsvariable X einen Wert zwischen a und b annimmt, a, b reell.

II. Laut Aufgabenstellung seien der Erwartungswert μ = 1,7 m und die Standardabweichung σ = 7 cm = 0,07 m. Die Verteilungsfunktion $\Phi_{1,7;\,0,07}(x)$ der normalverteilten Zufallsvariablen X mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 steht für die Größe (m) von Schülern der Schule und nimmt die folgenden tabellarisch erfassten Werte an:

Wahrscheinlichkeitstafel: Normalverteilung N(1.7,0.0049) (mit: $\Phi(x) = \Phi_{1,7;\,0,07}(x)$):

x	**φ(x)**	**Φ(x)**	**x**	**φ(x)**	**Φ(x)**	**x**	**φ(x)**	**Φ(x)**	**x**	**φ(x)**	**Φ(x)**	**x**	**φ(x)**	**Φ(x)**
1.45	0.009684	0.000137	**1.55**	0.573730	0.016062	**1.65**	4.415934	0.237525	**1.75**	4.415934	0.762475	**1.85**	0.573730	0.983938
1.46	0.015967	0.000296	1.56	0.771300	0.022750	1.66	4.840685	0.283855	1.76	3.947074	0.804317	1.86	0.418147	0.988865
1.47	0.025793	0.000507	1.57	1.015958	0.031645	1.67	5.199096	0.334118	1.77	3.456725	0.841345	1.87	0.298598	0.992421
1.48	0.040825	0.000836	1.58	1.311188	0.043238	1.68	5.471239	0.387548	1.78	2.966137	0.873451	1.88	0.208921	0.994936
1.49	0.063312	0.001350	1.59	1.658026	0.058042	1.69	5.641316	0.443202	1.79	2.493758	0.900729	1.89	0.143223	0.996679
1.50	0.096201	0.002137	1.60	2.054255	0.076564	1.70	5.699175	0.500000	1.80	2.054255	0.923436	1.90	0.096201	0.997863
1.51	0.143223	0.003321	1.61	2.493758	0.099271	1.71	5.641316	0.556798	1.81	1.658026	0.941958	1.91	0.063312	0.998650
1.52	0.208921	0.005064	1.62	2.966137	0.126549	1.72	5.471239	0.612452	1.82	1.311188	0.956762	1.92	0.040825	0.999164
1.53	0.298598	0.007579	1.63	3.456725	0.158655	1.73	5.199096	0.665882	1.83	1.015958	0.968355	1.93	0.025793	0.999493
1.54	0.418147	0.011135	1.64	3.947074	0.195683	1.74	4.840685	0.716145	1.84	0.771300	0.977250	1.94	0.015967	0.999704
1.55	0.573730	0.016062	1.65	4.415934	0.237525	1.75	4.415934	0.762475	1.85	0.573730	0.983938	1.95	0.009684	0.999863
x	**φ(x)**	**Φ(x)**	**x**	**φ(x)**	**Φ(x)**	**x**	**φ(x)**	**Φ(x)**	**x**	**φ(x)**	**Φ(x)**	**x**	**φ(x)**	**Φ(x)**

III. Gemäß I. und der Aufgabenstellung errechnet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit der Zufallsvariablen X als:

$p(1,6 \le X \le 1,8) = p(X \le 1,8) - p(X \le 1,6) = \Phi_{1,7;\,0,07}(1,8) - \Phi_{1,7;\,0,07}(1,6) = 0.923436 - 0.076564 = 0.846872$

laut Tabelle II. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit etwa 84,69 %, dass ein zufällig ausgewählter Schüler zwischen 1,60 m und 1,80 m groß ist.

(cm = Zentimeter, m = Meter)

www.michael-buhlmann.de / 05.2023 / Aufgabe 1873