Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Statistik/Stochastik
> Normalverteilung

Aufgabe: Eine bestimmte Art von Pflanzen ist dafür bekannt, dass ihre Höhe normalverteilt ist, mit einem Mittelwert von 60 cm und einer Standardabweichung von 5 cm. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Pflanze dieser Art eine Höhe von mehr als 65 cm hat?

Lösung: I. Die Gaußsche Glockenkurve ist eine von reellen Parametern μ und σ (>0) abhängige Schar von reellwertigen Funktionen $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$

Die Eigenschaften der Funktionen $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ führen zu deren Verwendung in der Stochastik, stellt doch jede Funktion $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte (Gauß-Funktion) einer sog. normalverteilten (gauß-verteilten) stetigen Zufallsvariablen X dar: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ als Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ. Der Parameter μ verschiebt die Dichtefunktion (nach rechts: μ>0; nach links: μ<0), der Parameter σ (>0) steht für die Breite der Dichtefunktion (schmaler: σ<1; breiter: σ>1). Ist μ=0 und σ=1, so liegt die Standardnormalverteilung N(0; 1) vor. Dabei lassen sich gemäß der Transformationsregel alle Normalverteilungen $N(\mu, \sigma^2)$ auf die Standardnormalverteilung N(0; 1) zurückführen. Dies gilt insbesondere für die Verteilungsfunktion $\Phi_{\mu,\sigma}(x)$ der normalverteilten Zufallsvariablen als Integralfunktion über die Dichte $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ mit ihren Wahrscheinlichkeiten:

$$p(X \le x) = \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mu,\sigma}(z)dz .$$

Für eine $N(\mu; \sigma^2)$-verteilte stetige Zufallsvariable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ gelten noch die folgenden Rechenregeln:

$$p(X=a) = 0$$
$$p(a\le X) = p(a<X) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma}(a)$$
$$p(a\le X\le b) = p(a<X\le b) = p(a\le X<b) = p(a<X<b) = \Phi_{\mu,\sigma}(b) - \Phi_{\mu,\sigma}(a)$$
$$p(X\le b) = p(X<b) = \Phi_{\mu,\sigma}(b).$$

$p(a\le X\le b)$ z.B. gibt damit die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsvariable X einen Wert zwischen a und b annimmt, a, b reell.

II. Laut Aufgabenstellung seien der Erwartungswert μ = 60 cm und die Standardabweichung σ = 5 cm. Die Verteilungsfunktion $\Phi_{60;\,5}(x)$ der normalverteilten Zufallsvariablen X mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 steht für die Pflanzenhöhe (cm) und nimmt die folgenden tabellarisch erfassten Werte an:

<u>Wahrscheinlichkeitstafel: Normalverteilung</u> N(60; 25) (mit: $\Phi(x) = \Phi_{60;\,5}(x)$):

x	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**
60.0	0.500000	**61.0**	0.579260	**62.0**	0.655422	**63.0**	0.725747	**64.0**	0.788145	**65.0**	0.841345	**66.0**	0.884930	**67.0**	0.919243	**68.0**	0.945201	**69.0**	0.964070
60.1	0.507978	61.1	0.587064	62.1	0.662757	63.1	0.732371	64.1	0.793892	65.1	0.846136	66.1	0.888768	67.1	0.922196	68.1	0.947384	69.1	0.965620
60.2	0.515953	61.2	0.594835	62.2	0.670031	63.2	0.738914	64.2	0.799546	65.2	0.850830	66.2	0.892512	67.2	0.925066	68.2	0.949497	69.2	0.967116
60.3	0.523922	61.3	0.602568	62.3	0.677242	63.3	0.745373	64.3	0.805105	65.3	0.855428	66.3	0.896165	67.3	0.927855	68.3	0.951543	69.3	0.968557
60.4	0.531881	61.4	0.610261	62.4	0.684386	63.4	0.751748	64.4	0.810570	65.4	0.859929	66.4	0.899727	67.4	0.930563	68.4	0.953521	69.4	0.969946
60.5	0.539828	61.5	0.617911	62.5	0.691462	63.5	0.758036	64.5	0.815940	65.5	0.864334	66.5	0.903200	67.5	0.933193	68.5	0.955435	69.5	0.971283
60.6	0.547758	61.6	0.625516	62.6	0.698468	63.6	0.764238	64.6	0.821214	65.6	0.868643	66.6	0.906582	67.6	0.935745	68.6	0.957284	69.6	0.972571
60.7	0.555670	61.7	0.633072	62.7	0.705401	63.7	0.770350	64.7	0.826391	65.7	0.872857	66.7	0.909877	67.7	0.938220	68.7	0.959070	69.7	0.973810
60.8	0.563559	61.8	0.640576	62.8	0.712260	63.8	0.776373	64.8	0.831472	65.8	0.876976	66.8	0.913085	67.8	0.940620	68.8	0.960796	69.8	0.975002
60.9	0.571424	61.9	0.648027	62.9	0.719043	63.9	0.782305	64.9	0.836457	65.9	0.881000	66.9	0.916207	67.9	0.942947	68.9	0.962462	69.9	0.976148
61.0	0.579260	62.0	0.655422	63.0	0.725747	64.0	0.788145	65.0	0.841345	66.0	0.884930	67.0	0.919243	68.0	0.945201	69.0	0.964070	70.0	0.977250
x	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**	**x**	**Φ(x)**

III. Gemäß I. und der Aufgabenstellung errechnet sich die gesuchte <u>Wahrscheinlichkeit</u> mit der Zufallsvariablen X als:

$p(X>65) = 1 - p(X \le 65) = 1 - \Phi_{60;\,5}(65) = 1 - 0.841345 = 0.158655$

laut Tabelle II. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Pflanze dieser Art eine Höhe von mehr als 65 cm hat, ungefähr 15,87%.

(cm = Zentimeter)