Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Statistik/Stochastik
> Normalverteilung

Aufgabe: Ein Unternehmen produziert Schrauben, deren Länge normalverteilt ist mit einem Mittelwert von 8 cm und einer Standardabweichung von 0,2 cm. Wie groß ist der Anteil der Schrauben, die zwischen 7,6 cm und 8,4 cm lang sind?

Lösung: I. Die Gaußsche Glockenkurve ist eine von reellen Parametern μ und σ (>0) abhängige Schar von reellwertigen Funktionen $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$:

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$

Die Eigenschaften der Funktionen $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ führen zu deren Verwendung in der Stochastik, stellt doch jede Funktion $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte (Gauß-Funktion) einer sog. normalverteilten (gauß-verteilten) stetigen Zufallsvariablen X dar: X ~ N(μ, σ^2) als Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ. Der Parameter μ verschiebt die Dichtefunktion (nach rechts: μ>0; nach links: μ<0), der Parameter σ (>0) steht für die Breite der Dichtefunktion (schmaler: σ<1; breiter: σ>1). Ist μ=0 und σ=1, so liegt die Standardnormalverteilung N(0; 1) vor. Dabei lassen sich gemäß der Transformationsregel alle Normalverteilungen N(μ, σ^2) auf die Standardnormalverteilung N(0; 1) zurückführen. Dies gilt insbesondere für die Verteilungsfunktion $\Phi_{\mu,\sigma}(x)$ der normalverteilten Zufallsvariablen als Integralfunktion über die Dichte $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ mit ihren Wahrscheinlichkeiten:

$$p(X \le x) = \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mu,\sigma}(z)dz .$$

Für eine N(μ; σ^2)-verteilte stetige Zufallsvariable X ~ N(μ, σ^2) gelten noch die folgenden Rechenregeln:

$$p(X=a) = 0$$
$$p(a\le X) = p(a<X) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma}(a)$$
$$p(a\le X\le b) = p(a<X\le b) = p(a\le X<b) = p(a<X<b) = \Phi_{\mu,\sigma}(b) - \Phi_{\mu,\sigma}(a)$$
$$p(X\le b) = p(X<b) = \Phi_{\mu,\sigma}(b).$$

$p(a\le X\le b)$ z.B. gibt damit die Wahrscheinlichkeit an, dass die Zufallsvariable X einen Wert zwischen a und b annimmt, a, b reell.

II. Vielfach liegt noch die Verteilungsfunktion $\Phi_{0;1}(z)$ der standardnormalverteilten Zufallsvariablen Z mit Erwartungswert μ=0 und Varianz σ^2=1 tabellarisch vor:

Wahrscheinlichkeitstafel: Normalverteilung N(0; 1) (mit: $\Phi(z) = \Phi_{0;1}(z)$):

z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)	z	Φ(z)
-3.00	0.001350	**-2.00**	0.022750	**-1.00**	0.158655	**0.00**	0.500000	**1.00**	0.841345	**2.00**	0.977250
-2.90	0.001866	-1.90	0.028717	-0.90	0.184060	0.10	0.539828	1.10	0.864334	2.10	0.982136
-2.80	0.002555	-1.80	0.035930	-0.80	0.211855	0.20	0.579260	1.20	0.884930	2.20	0.986097
-2.70	0.003467	-1.70	0.044565	-0.70	0.241964	0.30	0.617911	1.30	0.903200	2.30	0.989276
-2.60	0.004661	-1.60	0.054799	-0.60	0.274253	0.40	0.655422	1.40	0.919243	2.40	0.991802
-2.50	0.006210	-1.50	0.066807	-0.50	0.308538	0.50	0.691462	1.50	0.933193	2.50	0.993790
-2.40	0.008198	-1.40	0.080757	-0.40	0.344578	0.60	0.725747	1.60	0.945201	2.60	0.995339
-2.30	0.010724	-1.30	0.096800	-0.30	0.382089	0.70	0.758036	1.70	0.955435	2.70	0.996533
-2.20	0.013903	-1.20	0.115070	-0.20	0.420740	0.80	0.788145	1.80	0.964070	2.80	0.997445
-2.10	0.017864	-1.10	0.135666	-0.10	0.460172	0.90	0.815940	1.90	0.971283	2.90	0.998134
-2.00	0.022750	-1.00	0.158655	0.00	0.500000	1.00	0.841345	2.00	0.977250	3.00	0.998650
z	**Φ(z)**	**z**	**Φ(z)**	**z**	**Φ(z)**	**z**	**Φ(z)**	**z**	**Φ(z)**	**z**	**Φ(z)**

III. Die Zufallsvariable X misst die Länge (cm) der im Unternehmen produzierten Schrauben und besitzt folglich den Erwartungswert μ = 8 cm und die Standardabweichung σ = 0,2 cm. Um die Tabelle der Standardnormalverteilung nutzen zu können, führen wir die Transformation

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-8}{0{,}2}$$

auf die Standardnormalverteilung durch und erhalten auf Grund des in der Aufgabenstellung angegebenen Längenbereichs zwischen $x_1 = 7{,}6$ cm und $x_2 = 8{,}4$ cm die für unsere Berechnung wichtigen Werte:

$$z_1 = \frac{7{,}6-8}{0{,}2} = \frac{-0{,}4}{0{,}2} = -2\,,\ z_2 = \frac{8{,}4-8}{0{,}2} = \frac{0{,}4}{0{,}2} = 2\,.$$

Gemäß I. und der Aufgabenstellung errechnet sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit den Zufallsvariablen X und Z als:

$p(7{,}6 \le X \le 8{,}4) = p(-2 \le Z \le 2) = p(Z \le 2) - p(Z \le -2) = \Phi_{0;1}(2) - \Phi_{0;1}(-2) = 0.977250 - 0.022750 = 0.9545$.

laut Tabelle II. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Schraube eine Länge zwischen 7,6 cm und 8,4 cm hat, 95,45%. Dies ist im Übrigen hinsichtlich der Zufallsvariablen X die Wahrscheinlichkeit des 2σ-Intervalls [μ-2σ; μ+2σ] = [7,6; 8,4] um den Erwartungswert μ = 8.

(cm = Zentimeter)