Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Statistik/Stochastik
> Binomialverteilung

Aufgabe: Ein fairer Spielwürfel (mit den Augenzahlen 1 bis 6) wird zehn Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau dreimal die Zahl 6 gewürfelt wird?

Lösung: I. Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen (T = Treffer, N = Nichttreffer), der Grundwahrscheinlichkeit p als Trefferwahrscheinlichkeit, der Anzahl n der Experimentwiederholung „mit Zurücklegen“. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer bei n-maliger Wiederholung des Experiments an. Sie ist B(n; p)-binomialverteilt für die mit den Parametern n (Anzahl der Versuchswiederholungen) und p (Trefferwahrscheinlichkeit) und genügt der Bernoulliformel:

$$p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\text{, k = 0, 1, …n.}$$

mit $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ als Binomialkoeffizienten. Als Rechenregeln im Zusammenhang mit der Bernoulliformel ergeben sich:

$$p(X=0) = (1-p)^n$$
$$p(X=n) = p^n$$
$$p(X\le k) = p(X=0) + p(X=1) + \ldots + p(X=k) = 1 - p(X>k)$$
$$p(X<k) = p(X\le k-1) = 1 - p(X\ge k)$$
$$p(X\ge k) = 1 - p(X\le k-1)$$
$$p(X>k) = p(X\ge k+1) = 1 - p(X\le k)$$
$$p(k_1\le X\le k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X\le k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2) = p(X\le k_2)-p(X\le k_1)$$
$$p(k_1\le X<k_2) = p(X=k_1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1-1)$$
$$p(k_1<X<k_2) = p(X=k_1+1) + \ldots + p(X=k_2-1) = p(X\le k_2-1)-p(X\le k_1).$$

II. Es liegt mit Werfen eines Würfels ein Bernoulli-Experiment vor. Zehnmaliges Werfen bedeutet für die zugrunde liegende binomialverteilte Zufallsvariable X als Anzahl der Versuchswiederholungen n = 10, der faire Spielwürfel die Trefferwahrscheinlichkeit p = 1/6 bei gleichverteilten Wahrscheinlichkeiten für alle Augenzahlen. Die zu berechnende Wahrscheinlichkeit ergibt sich nach der Bernoulliformel mit k = 3 als:

$$p(X=3) = \binom{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)^{10-3}=\binom{10}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^7=120\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0{,}155,$$

wobei sich der Binomialkoeffizient als

$$\binom{10}{3}=\frac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}=\frac{10!}{7!\cdot 3!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=\frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}=4\cdot 3\cdot 10= 120$$

errechnet. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt damit 15,5 %.

www.michael-buhlmann.de / 0&.2023 / Aufgabe 1880