

# Mathematikaufgaben

## > Statistik/Stochastik

### > Binomialverteilung

---

**Aufgabe:** Ein idealer Spielwürfel mit den Augen 1 bis 6 wird zehn Mal geworfen und dabei die Anzahl der gewürfelten Sechsen notiert. Die Zufallsgröße  $X$  zählt die Anzahl der gewürfelten Sechsen. Erstelle zur Zufallsgröße  $X$  die Wahrscheinlichkeitsverteilung und ein dazu passendes Histogramm.

**Lösung:** I. Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment mit zwei Ausgängen ( $T = \text{Treffer}$ ,  $N = \text{Nichttreffer}$ ), der Grundwahrscheinlichkeit  $p$  als Trefferwahrscheinlichkeit, der Anzahl  $n$  der Experimentwiederholung „mit Zurücklegen“. Die Zufallsgröße  $X$  gibt die Anzahl der Treffer bei  $n$ -maliger Wiederholung des Experiments an. Sie ist  $B(n; p)$ -binomialverteilt für die mit den Parametern  $n$  (Anzahl der Versuchswiederholungen) und  $p$  (Trefferwahrscheinlichkeit) und genügt der Bernoulli-formel:

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

mit  $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  als Binomialkoeffizienten.

II. Gemäß I. (gleiche Versuchssituation beim Würfeln, Treffer als gewürfelte Sechsen) liegt mit dem Werfen des Würfels ein Bernoulli-Experiment vor, mit der Zufallsgröße  $X$  mithin eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern  $n = 10$  (Anzahl der Versuchswiederholungen) und  $p = 1/6$  (Trefferwahrscheinlichkeit; alle Würfelseiten besitzen dieselbe Wahrscheinlichkeit).

III. Wir berechnen für  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$  die Wahrscheinlichkeit  $p(X=k)$ . Z.B. ergibt sich nach der Bernoulliformel mit  $k = 3$  als:

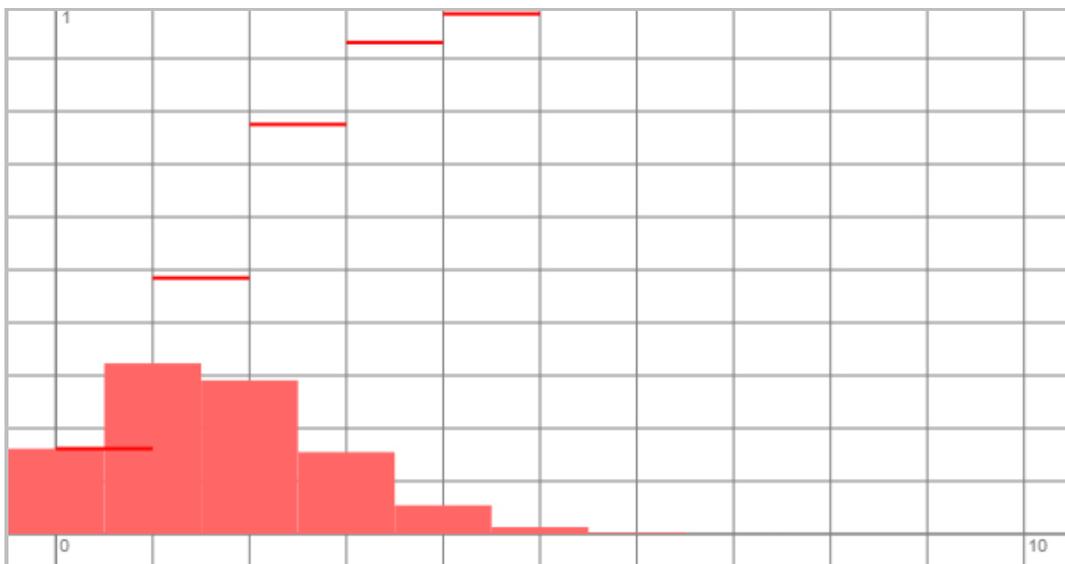
$$p(X=3) = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{10-3} = \binom{10}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 120 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7 = 0,155045,$$

usw. Auf ähnliche Weise ergeben sich die übrigen Wahrscheinlichkeiten  $p(X=0)$ ,  $p(X=1)$ ,  $p(X=2)$ , ...,  $p(X=10)$ .

IV. Es ergibt sich daraus die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung (einschließlich der kumulierten Wahrscheinlichkeiten):

$x$	$p(X=x)$	$p(X \leq x)$
0	0.161506	0.161506
1	0.323011	0.484517
2	0.29071	0.775227
3	0.155045	0.930272
4	0.054266	0.984538
5	0.013024	0.997562
6	0.002171	0.999732
7	0.000248	0.999981
8	0.000019	0.999999
9	0.000001	1
10	0	1

V. Das zur Wahrscheinlichkeitsverteilung passende Histogramm stellt sich dar als:



[www.michael-buhlmann.de](http://www.michael-buhlmann.de) / 05.2024 / Aufgabe 2105