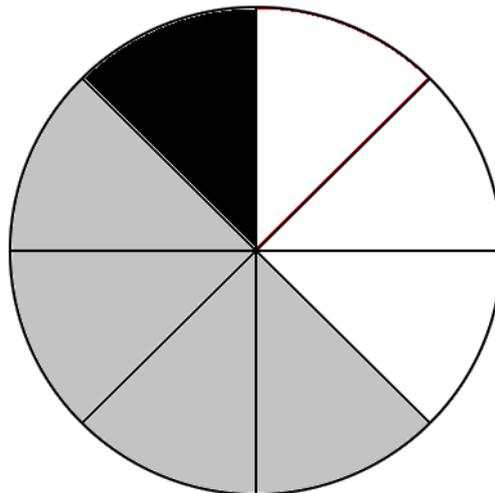


Mathematikaufgaben

> Statistik/Stochastik

> Einstufiges Zufallsexperiment

Aufgabe: Das nachstehende Glücksrad, das einmal gedreht wird und nach Ende der Drehung ein Segment einer bestimmten Farbe anzeigt, ist in acht gleich große Segmente der Farben weiß, grau und schwarz unterteilt.



Bestimme die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Farben.

Lösung: I. Zufallsexperimente (Zufallsversuche, Zufallsvorgänge) sind mathematisch modellierte Prozesse. Sie lassen sich durch sog. Wahrscheinlichkeitsbäume (aus Knoten, Verzweigungen [Ausgänge, Merkmalsausprägungen], Kanten [Zweige] und Pfaden [Äste]) darstellen, die Ergebnisse und Wahrscheinlichkeiten anzeigen. Zufallsexperimente, die auf Ergebnisse mit immer derselben Wahrscheinlichkeit hinführen, heißen Laplace-Experimente. Ergebnisse gehören jeweils zu einem Pfad im Wahrscheinlichkeitsbaum, Ereignisse sind Zusammenfassungen von Ergebnissen, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses errechnet sich gemäß den Pfadregeln (Addition von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade bei einem einstufigen Zufallsversuch).

Bei einem Laplace-Experiment gilt hinsichtlich der Wahrscheinlichkeiten $p(E)$ eines Ereignisses E:

$$p(E) = \frac{n_E}{n}$$

mit n_E als Anzahl der zum Ereignis E gehörenden Ergebnisse und n als Anzahl aller Ergebnisse.

II. Im einstufigen Zufallsexperiment besteht das Glücksrad aus den ($n = 8$) gleich großen Segmenten, die für die Ergebnisse „weiß“, „weiß“, „weiß“, „grau“, „grau“, „grau“, „grau“, „schwarz“ stehen. Das Drehen hin zu jedem Segment hat damit die jeweils gleiche Wahrscheinlichkeit $1/8$. Es liegt also ein Laplace-Experiment vor. Es gilt:

Ereignis „weiß“ (Es wird ein weißes Glücksradsegment gedreht.): Enthält die drei Ergebnisse

„weiß“, „weiß“, „weiß“, die Wahrscheinlichkeit beträgt wegen $n_{\text{weiß}} = 3$, $n = 8$ damit: $p(\text{weiß}) = \frac{3}{8} =$

$0,375 = 37,5 \%$.

Ereignis „grau“ (Es wird ein graues Glücksradsegment gedreht.): Enthält die vier Ergebnisse „grau“, „grau“, „grau“, „grau“, die Wahrscheinlichkeit beträgt wegen $n_{\text{grau}} = 4$, $n = 8$ damit:

$$p(\text{grau}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50,0 \%$$

Ereignis „schwarz“ (Es wird das schwarze Glücksradsegment gedreht.): Enthält das eine Ergebnis „schwarz“, die Wahrscheinlichkeit beträgt wegen $n_{\text{schwarz}} = 1$, $n = 8$ damit: $p(\text{schwarz}) = \frac{1}{8} = 0,125 = 12,5 \%$.

Die Summe aller drei Wahrscheinlichkeiten beträgt 1 oder 100,0 %. Zum Laplace-Experiment gehört darüber hinaus das einstufige Baumdiagramm:

Wahrscheinlichkeitsbaum (Ausgänge: weiß, weiß, weiß, grau, grau, grau, grau, schwarz; einmaliges Durchführen):

1	Versuchsdurchführung		
1/8 weiß	>	p(weiß) =	0.125 1
1/8 weiß	>	p(weiß) =	0.125 2
1/8 weiß	>	p(weiß) =	0.125 3
1/8 grau	>	p(grau) =	0.125 4
1/8 grau	>	p(grau) =	0.125 5
1/8 grau	>	p(grau) =	0.125 6
1/8 grau	>	p(grau) =	0.125 7
1/8 schwarz	>	p(schwarz) =	0.125 8
	Summe:	1	

III. Eine andere Herangehensweise an das Zufallsexperiment besteht darin, die Glücksradsegmente gleicher Farbe jeweils zu einem (größeren) Segment zusammenzuführen. In dieser Sichtweise liegt kein Laplace-Experiment vor, und obiger Wahrscheinlichkeitsbaum formt sich unter Verwendung der Wahrscheinlichkeiten $p(\text{weiß}) = 3/8$, $p(\text{grau}) = 4/8 = 1/2$ und $p(\text{schwarz}) = 1/8$ um in:

Wahrscheinlichkeitsbaum (Ausgänge: weiß, grau, schwarz; einmaliges Durchführen):

1	Versuchsdurchführung		
3/8 weiß	>	p(weiß) =	0.375 1
1/2 grau	>	p(grau) =	0.5 2
1/8 schwarz	>	p(schwarz) =	0.125 3
	Summe:	1	