Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Statistik/Stochastik
> Stochastische Unabhängigkeit

Aufgabe: Ein Zufallsexperiment wird definiert durch alle seine möglichen Ergebnisse. Die Ereignisse A und B als Mengen von Ergebnissen seien stochastisch unabhängig voneinander. Zeige, dass dies auch für die Ereignisse A^- (nicht A) und B bzw. A^- und B^- (nicht B) gilt.

Lösung: I. Zwei Ereignisse A, B sind stochastisch unabhängig, wenn gilt hinsichtlich deren Wahrscheinlichkeiten p(A), p(B) gilt:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) \quad (*)$$

($A \cap B$ als Schnittmenge der Ereignisse A und B).

II. Es gilt die Identität (*), zudem die Beziehung zwischen Ereignis A und Gegenereignis A^-:

$$p(A^-) = 1 - p(A) \quad (**)$$

Wir rechnen auch unter Verwendung der mengentheoretischen Aussage $A^- \cap B = B \setminus (A \cap B)$:

$$p(A^- \cap B) = p(B) - p(A \cap B) \overset{(*)}{=} p(B) - p(A) \cdot p(B) = (1 - p(A)) \cdot p(B) \overset{(**)}{=} p(A^-) \cdot p(B) \quad (***),$$

womit auch die stochastische Unabhängigkeit der Ereignisse A^- und B nachgewiesen ist.

III. Auf ähnliche Weise erhalten wir wegen: $A^- \cap B^- = A^- \setminus (A^- \cap B)$:

$$p(A^- \cap B^-) = p(A^-) - p(A^- \cap B) \overset{(***)}{=} p(A^-) - p(A^-) \cdot p(B) = p(A^-) \cdot (1 - p(B)) \overset{(**)}{=} p(A^-) \cdot p(B^-)$$

und damit die stochastische Unabhängigkeit der Gegenereignisse A^- und B^-.

www.michael-buhlmann.de / 06.2024 / Aufgabe 2120