

Mathematikaufgaben

> Statistik/Stochastik

> Zweistufiges Zufallsexperiment

Aufgabe: In einem Behälter befinden sich drei weiße, zwei rote und fünf schwarze Kugeln. Es wird zwei Mal mit bzw. ohne Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

- A: Es wird zunächst eine weiße Kugel, dann eine schwarze Kugel gezogen.
- B: Es werden eine weiße und eine schwarze Kugel gezogen.
- C: Es werden nur rote Kugeln gezogen.
- D: Es wird mindestens ein weiße Kugel gezogen.
- E: Es werden verschiedenfarbige Kugeln gezogen.

Lösung: I. Zufallsexperimente (Zufallsversuche, Zufallsvorgänge) sind mathematisch modellierte Prozesse. Sie lassen sich durch sog. Wahrscheinlichkeitsbäume (aus Knoten, Verzweigungen [Ausgänge, Merkmalsausprägungen], Kanten [Zweige] und Pfaden [Äste]) darstellen, die Ergebnisse und Wahrscheinlichkeiten anzeigen. Ergebnisse gehören jeweils zu einem Pfad im Wahrscheinlichkeitsbaum, Ereignisse sind Zusammenfassungen von Ergebnissen, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses errechnet sich gemäß den Pfadregeln (Addition von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade, Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades).

II. Wir stellen das zweistufige Zufallsexperiment mit Zurücklegen in einem Baumdiagramm dar. Es gilt:

1.	2.	Versuchsdurchführung(en)										
	3/10 weiß	>	p(weiß; weiß) =	0.09	1				◀			
	3/10 weiß	2/10 rot	>	p(weiß; rot) =	0.06	2			◀ ◀			
	5/10 schwarz	>	p(weiß; schwarz) =	0.15	3		◀	◀	◀ ◀			
	3/10 weiß	>	p(rot; weiß) =	0.06	4				◀ ◀			
	2/10 rot	2/10 rot	>	p(rot; rot) =	0.04	5			◀			
	5/10 schwarz	>	p(rot; schwarz) =	0.1	6				◀			
	3/10 weiß	>	p(schwarz; weiß) =	0.15	7		◀		◀ ◀			
	5/10 schwarz	2/10 rot	>	p(schwarz; rot) =	0.1	8			◀			
	5/10 schwarz	>	p(schwarz; schwarz) =	0.25	9							
	Summe:				1		Auswertung:	Ereignis A	Ereignis B	Ereignis C	Ereignis D	Ereignis E
	Wahrscheinlichkeitsverteilung											

Im (erweiterten) Baumdiagramm stellen zwei Spalten die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ergebnisse dar. Es ist:

Ergebnis	2x weiß	weiß, rot	weiß, schwarz	rot, weiß	2x rot	rot, schwarz	schwarz, weiß	schwarz, rot	2x schwarz	Summe
Wahrscheinlichkeit	0.09	0.06	0.15	0.06	0.04	0.1	0.15	0.1	0.25	1

Für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, C, D, E gilt dann gemäß den Pfadregeln und der Regel von der Gegenwahrscheinlichkeit:

$$p(A) = p(\text{weiß, schwarz}) = 0,3 \cdot 0,5 = 0,15,$$

$$p(B) = p(1x \text{ weiß, } 1x \text{ schwarz}) = 0,3 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,3 = 0,15 + 0,15 = 0,3$$

$$p(C) = p(2x \text{ rot}) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04$$

$$p(D) = p(\text{mindestens } 1x \text{ weiß}) = 0,3 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,3 = 0,51$$

$$p(E) = p(\text{verschiedenfarbige Kugeln}) = 1 - p(\text{gleichfarbige Kugeln}) = 1 - (0,3 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,5) = 1 - 0,38 = 0,62.$$

III. Wir stellen das zweistufige Zufallsexperiment ohne Zurücklegen in einem Baumdiagramm dar. Es gilt:

1.	2.	Versuchsdurchführung(en)								
	2/9 weiß	> p(weiß; weiß) =	0.0666667	1					◀	
	3/10 weiß	2/9 rot	> p(weiß; rot) =	0.0666667	2				◀ ◀	
	5/9 schwarz	> p(weiß; schwarz) =	0.1666667	3		◀	◀		◀ ◀	
	3/9 weiß	> p(rot; weiß) =	0.0666667	4					◀ ◀	
	2/10 rot	1/9 rot	> p(rot; rot) =	0.0222222	5				◀	
	5/9 schwarz	> p(rot; schwarz) =	0.1111111	6					◀	
	3/9 weiß	> p(schwarz; weiß) =	0.1666667	7			◀		◀ ◀	
	5/10 schwarz	2/9 rot	> p(schwarz; rot) =	0.1111111	8				◀	
	4/9 schwarz	> p(schwarz; schwarz) =	0.2222222	9						
	Summe:	1			Auswertung:	Ereignis A	Ereignis B	Ereignis C	Ereignis D	Ereignis E
	Wahrscheinlichkeitsverteilung									

Im (erweiterten) Baumdiagramm stellen zwei Spalten die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Ergebnisse dar. Es ist:

Ergebnis	2x weiß	weiß, rot	weiß, schwarz	rot, weiß	2x rot	rot, schwarz	schwarz, weiß	schwarz, rot	2x schwarz	Summe
Wahrscheinlichkeit	6/90	6/90	15/90	6/90	2/90	10/90	15/90	10/90	20/90	1

Für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, C, D, E gilt dann gemäß den Pfadregeln und der Regel von der Gegenwahrscheinlichkeit:

$$p(A) = p(\text{weiß, schwarz}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$$

$$p(B) = p(1x \text{ weiß, } 1x \text{ schwarz}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

$$p(C) = p(2x \text{ rot}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$$

$$p(D) = p(\text{mindestens 1x wei\ss}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15}$$

$$p(E) = p(\text{verschiedenfarbige Kugeln}) = 1 - p(\text{gleichfarbige Kugeln}) = 1 - \left(\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \right) = 1 - \frac{18}{90} = \frac{72}{90} = \frac{4}{5}$$