

Mathematikaufgaben

> Statistik/Stochastik

> Dreistufiges Zufallsexperiment

Aufgabe: In einem Behälter befinden sich zwei weiße und acht schwarze Kugeln. Es wird drei Mal mit Zurücklegen gezogen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

- A: Es wird zunächst eine weiße Kugel, dann werden zwei schwarze Kugeln gezogen.
- B: Es werden eine weiße und zwei schwarze Kugeln gezogen.
- C: Es werden nur schwarze Kugeln gezogen.
- D: Es wird mindestens ein weiße Kugel gezogen.
- E: Es werden nur gleichfarbige Kugeln gezogen.

Lösung: I. Zufallsexperimente (Zufallsversuche, Zufallsvorgänge) sind mathematisch modellierte Prozesse. Sie lassen sich durch sog. Wahrscheinlichkeitsbäume (aus Knoten, Verzweigungen [Ausgänge, Merkmalsausprägungen], Kanten [Zweige] und Pfaden [Äste]) darstellen, die Ergebnisse und Wahrscheinlichkeiten anzeigen. Ergebnisse gehören jeweils zu einem Pfad im Wahrscheinlichkeitsbaum, Ereignisse sind Zusammenfassungen von Ergebnissen, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses errechnet sich gemäß den Pfadregeln (Addition von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade, Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades).

II. Wir stellen das dreistufige Zufallsexperiment mit Zurücklegen in einem Baumdiagramm dar. Es gilt:

1.	2.	3.	Versuchsdurchführung(en)						
		2/10 weiß	>	$p(\text{weiß; weiß; weiß}) =$	0.008	1			◀
	2/10 weiß								
		8/10 schwarz	>	$p(\text{weiß; weiß; schwarz}) =$	0.032	2			◀
	2/10 weiß								
		2/10 weiß	>	$p(\text{weiß; schwarz; weiß}) =$	0.032	3			◀
	8/10 schwarz								
		8/10 schwarz	>	$p(\text{weiß; schwarz; schwarz}) =$	0.128	4		◀	◀
		2/10 weiß	>	$p(\text{schwarz; weiß; weiß}) =$	0.032	5			◀
	2/10 weiß								
		8/10 schwarz	>	$p(\text{schwarz; weiß; schwarz}) =$	0.128	6		◀	◀
	8/10 schwarz								
		2/10 weiß	>	$p(\text{schwarz; schwarz; weiß}) =$	0.128	7		◀	◀
	8/10 schwarz								
		8/10 schwarz	>	$p(\text{schwarz; schwarz; schwarz}) =$	0.512	8		◀	◀
			Summe:			1	Auswertung:	Ereignis A	Ereignis B
			Wahrscheinlichkeitsverteilung					Ereignis C	Ereignis D
								Ereignis E	

III. An Wahrscheinlichkeiten für die aufgeführten Ereignisse A, B, C, D, E errechnen sich gemäß den Pfadregeln und der Regel von der Gegenwahrscheinlichkeit:

$$p(A) = p(\text{weiß, schwarz, schwarz}) = 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,128$$

$$p(B) = p(1x \text{ weiß, } 2x \text{ schwarz}) = 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,2 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 3 \cdot 0,2 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 3 \cdot 0,128 = 0,384$$

$$p(C) = p(3x \text{ schwarz}) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,512$$

$$p(D) = p(\text{mindestens } 1x \text{ weiß}) = 1 - p(0x \text{ weiß}) = 1 - 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 1 - 0,512 = 0,488$$

$$p(E) = p(\text{gleichfarbige Kugeln}) = 0,2 \cdot 0,2 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,008 + 0,512 = 0,52.$$