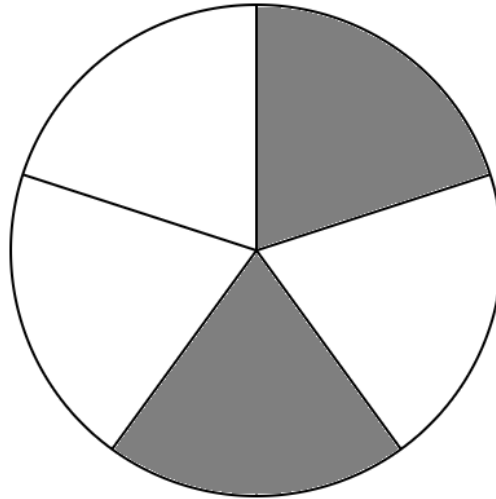


Mathematikaufgaben

> Statistik/Stochastik

> Ein- bis dreistufiges Zufallsexperiment

Aufgabe: Das nachstehende Glücksrad ist in fünf gleich große Segmente der Farben weiß und grau unterteilt.



a) Das Glücksrad wird einmal gedreht. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

- A: Es wird ein graues Segment gedreht.
- B: Es wird ein weißes Segment gedreht.
- C: Es erscheint die Farbe rot.
- D: Es erscheinen die Farben grau oder weiß.

b) Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

- A: Es wird zunächst ein graues, dann ein weißes Segment gedreht.
- B: Es erscheint zweimal weiß.
- C: Es erscheint einmal grau und einmal weiß.
- D: Es wird mindestens einmal grau gedreht.

c) Das Glücksrad wird dreimal gedreht. Bestimme die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse.

- A: Es wird zunächst ein graues Segment, dann werden zwei weiße Segmente gedreht.
- B: Es erscheint genau zweimal weiß.
- C: Es erscheint mindestens zweimal weiß.
- D: Es erscheint höchstens zweimal grau.

Lösung: I. Zufallsexperimente (Zufallsversuche, Zufallsvorgänge) sind mathematisch modellierte Prozesse. Sie lassen sich durch sog. Wahrscheinlichkeitsbäume (aus Knoten, Verzweigungen [Ausgänge, Merkmalsausprägungen], Kanten [Zweige] und Pfaden [Äste]) darstellen, die Ergebnisse und Wahrscheinlichkeiten anzeigen. Ergebnisse gehören jeweils zu einem Pfad im Wahrscheinlichkeitsbaum, Ereignisse sind Zusammenfassungen/Mengen von Ergebnissen, Ergebnisse und Ereignisse können in der Mengenschreibweise als Teilmenge der Grundmenge aller Ergebnisse dargestellt werden, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses errechnet sich gemäß den Pfadregeln (Addition von Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade, Multiplikation von Wahrscheinlichkeiten entlang eines Pfades).

II. Wir errechnen für das ein-, zwei-, dreimalige Drehen des Glücksrades die Wahrscheinlichkeiten der in der Aufgabenstellung aufgeführten Ereignisse.

a) Es ergibt sich zunächst der folgende einstufige Wahrscheinlichkeitsbaum zum Glücksrad:

Wahrscheinlichkeitsbaum (Ausgänge: grau, weiß; 1-maliges Drehen):

| | | | | | | |
|----------|--------------------------|-----------|-----|-------------|------------|------------|
| 1. | Versuchsdurchführung(en) | | | | | |
| | | | | | | |
| 2/5 grau | > | p(grau) = | 0.4 | 1 | ◀ | ◀ |
| | | | | | | |
| 3/5 weiß | > | p(weiß) = | 0.6 | 2 | ◀ | ◀ |
| | | | | | | |
| | Summe: | 1 | | Auswertung: | Ereignis A | Ereignis B |
| | | | | | Ereignis C | Ereignis D |

Die Grundmenge aller Ergebnisse ist: $S = \{g, w\}$, die Ereignisse A, B, C, D können als Teilmengen der Grundmenge beschrieben werden, woraus sich die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten ergeben:

Ereignis A: $A = \{g\} \rightarrow p(A) = 0,4$

Ereignis B: $B = \{w\} \rightarrow p(B) = 0,6$

Ereignis C: $C = \{\} \rightarrow p(C) = 0$ (unmögliches Ereignis)

Ereignis D: $D = \{g, w\} \rightarrow p(D) = 1$ (sicheres Ereignis).

b) Der zweistufige Wahrscheinlichkeitsbaum zum Glücksrad stellt sich dar als:

Wahrscheinlichkeitsbaum (Ausgänge: grau, weiß; 2-maliges Drehen):

| | | | | | | |
|----------|----------|--------------------------|-----------------|-------------|------------|------------|
| 1. | 2. | Versuchsdurchführung(en) | | | | |
| | | | | | | |
| | 2/5 grau | > | p(grau; grau) = | 0.16 | 1 | ◀ |
| | | | | | | |
| 2/5 grau | | | | | | |
| | 3/5 weiß | > | p(grau; weiß) = | 0.24 | 2 | ◀ |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | 2/5 grau | > | p(weiß; grau) = | 0.24 | 3 | ◀ |
| | | | | | | |
| 3/5 weiß | | | | | | |
| | 3/5 weiß | > | p(weiß; weiß) = | 0.36 | 4 | ◀ |
| | | | | | | |
| | Summe: | 1 | | Auswertung: | Ereignis A | Ereignis B |
| | | | | | Ereignis C | Ereignis D |

Die Grundmenge aller Ergebnisse ist: $S = \{gg, gw, wg, ww\}$, die Ereignisse A, B, C, D können als Teilmengen der Grundmenge beschrieben werden, woraus sich die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten ergeben:

Ereignis A: $A = \{gw\} \rightarrow p(A) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$

Ereignis B: $B = \{ww\} \rightarrow p(B) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$

Ereignis C: $C = \{gw, wg\} \rightarrow p(C) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,24 + 0,24 = 0,48$

Ereignis D: $D = \{gg, gw, wg\} \rightarrow p(D) = 1 - p(ww) = 1 - 0,36 = 0,64$ (Gegenwahrscheinlichkeit).

c) Der dreistufige Wahrscheinlichkeitsbaum zum Glücksrad stellt sich dar als:

Wahrscheinlichkeitsbaum (Ausgänge: grau, weiß; 3-maliges Drehen):

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | 1. | <input type="checkbox"/> | 2. | <input type="checkbox"/> | 3. | Versuchsdurchführung(en) | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 2/5 grau | > | $p(\text{grau; grau; grau}) = 0.064$ | <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 2/5 grau | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 3/5 weiß | > | $p(\text{grau; grau; weiß}) = 0.096$ | <input type="checkbox"/> | 2 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 2/5 grau | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 2/5 grau | > | $p(\text{grau; weiß; grau}) = 0.096$ | <input type="checkbox"/> | 3 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 3/5 weiß | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 3/5 weiß | > | $p(\text{grau; weiß; weiß}) = 0.144$ | <input type="checkbox"/> | 4 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 2/5 grau | > | $p(\text{weiß; grau; grau}) = 0.096$ | <input type="checkbox"/> | 5 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 2/5 grau | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 3/5 weiß | > | $p(\text{weiß; grau; weiß}) = 0.144$ | <input type="checkbox"/> | 6 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 3/5 weiß | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 2/5 grau | > | $p(\text{weiß; weiß; grau}) = 0.144$ | <input type="checkbox"/> | 7 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 3/5 weiß | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | 3/5 weiß | > | $p(\text{weiß; weiß; weiß}) = 0.216$ | <input type="checkbox"/> | 8 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | | | | | | | | | | |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | Summe: | <input type="checkbox"/> | 1 | <input type="checkbox"/> | Auswertung: | Ereignis A | Ereignis B | Ereignis C | Ereignis D | |

Die Grundmenge aller Ergebnisse ist: $S = \{ggg, ggw, gwg, gww, wgw, ww, www\}$, die Ereignisse A, B, C, D können als Teilmengen der Grundmenge beschrieben werden, woraus sich die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten ergeben:

Ereignis A: $A = \{gw\} \rightarrow p(A) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$

Ereignis B: $B = \{ww\} \rightarrow p(B) = 0,6 \cdot 0,6 = 0,36$

Ereignis C: $C = \{gw, wg\} \rightarrow p(C) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,4 = 0,24 + 0,24 = 0,48$

Ereignis D: $D = \{gg, gw, wg\} \rightarrow p(D) = 1 - p(ww) = 1 - 0,36 = 0,64$ (Gegenwahrscheinlichkeit).