Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Stammfunktion

Aufgabe: Berechne für alle reellen a, b ≠ 0 das Integral:

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx\,.$$

Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals (als Gesamtheit aller Stammfunktionen) verwenden wir die Produktintegration (partielle Integration) gemäß der Regel:

$$\int u'(x)\cdot v(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx\,,\ \int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx$$

Dabei ergeben sich folgende Vorgehensweisen je nach vorgegebenem Produkt im Integranden:

a) Produkt = Polynom * Exponentialfunktion: Wähle als u'(x) die Exponentialfunktion, als v(x) das Polynom n. Grades. Nach n-maliger Anwendung der Produktintegration ist das entsprechende Integral vollständig gelöst.
b) Produkt = Polynom * Sinus-/Kosinusfunktion: Wähle als u'(x) die Sinus-/Kosinusfunktion, als v(x) das Polynom n. Grades. Nach n-maliger Anwendung der Produktintegration ist das entsprechende Integral vollständig gelöst.
c) Produkt = Polynom * natürlicher Logarithmus: Wähle als u'(x) das Polynom n. Grades und v(x) = ln(x). Nach einmaliger Anwendung der Produktintegration ist das entsprechende Integral vollständig gelöst.
d) Produkt = Sinus-/Kosinusfunktion * Sinus-/Kosinusfunktion: Die Wahl von u'(x) und v(x) ist beliebig. Die Integration führt dadurch, dass sich Sinus- und Kosinusfunktionen beim Ab- und Aufleiten wiederholen, wieder auf das anfängliche Integral, so dass die Integration als Gleichung aufgefasst werden kann, die nach dem zu lösenden Integral umgeformt werden kann.
e) Produkt = Exponentialfunktion * Sinus-/Kosinusfunktion: Die Wahl von u'(x) und v(x) ist beliebig. Die Integration führt dadurch, dass sich Sinus- und Kosinusfunktionen beim Ab- und Aufleiten wiederholen, wieder auf das anfängliche Integral, so dass die Integration als Gleichung aufgefasst werden kann, die nach dem zu lösenden Integral umgeformt werden kann.

II. Wir führen die Produktintegration zweimal durch:

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \int\frac{1}{a}e^{ax}b\cos(bx)dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \int\frac{b}{a}e^{ax}\cos(bx)dx =$$

$$\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos(bx)dx =$$

$$\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a}\left[\frac{1}{a}e^{ax}\cos(bx) - \int\frac{1}{a}e^{ax}\cdot(-b\sin(bx))dx\right] =$$

$$\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b}{a}\int\frac{b}{a}e^{ax}\sin(bx)dx =$$

$$\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)dx \quad (*)$$

mit: u'(x) = e^{ax}, u(x) = e^{ax}/a, v(x) = sin(bx), v'(x) = b·cos(bx) (1. Produktintegration) bzw: u'(x) = e^{ax}, u(x) = e^{ax}/a, v(x) = cos(bx), v'(x) = -b·sin(bx) (2. Produktintegration).

Die Gleichung (*) ist nach $\int e^{ax}\sin(bx)dx$ umzuformen, also:

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)dx \qquad | + \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)dx$$

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx + \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) \qquad \text{(Ausklammern)}$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) \qquad \text{(Zusammenfassen)}$$

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) \qquad | \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{a^2}{a^2 + b^2}\cdot\frac{1}{a}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a^2}{a^2 + b^2}\cdot\frac{b}{a^2}e^{ax}\cos(bx) \qquad \text{(Zusammenfassen)}$$

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{a}{a^2 + b^2}e^{ax}\sin(bx) - \frac{b}{a^2 + b^2}e^{ax}\cos(bx) \qquad \text{(Ausklammern)}$$

$$\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left[a\sin(bx) - b\cos(bx)\right]$$

Das <u>unbestimmte Integral</u> lautet damit: $\int e^{ax}\sin(bx)dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}\left[a\sin(bx) - b\cos(bx)\right]$ + C mit C als Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 12.2015 / Aufgabe 160