

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Stammfunktion

Aufgabe: Berechne das Integral:

$$\int 2x(x^2 + 8)^5 dx.$$

Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals (als Gesamtheit aller Stammfunktionen) verwenden wir die Substitutionsregel (als Umkehrung der Kettenregel für das Ableiten):

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) = F(g(x)) \text{ mit: } u = g(x), u'(x) = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow u'(x) dx = du.$$

D.h.: Eine Substitution ist möglich, wenn die Ableitung eines „inneren“ Terms des Integranden als (bis auf eine multiplikative Konstante bestimmter) Faktor im Integral vorhanden ist.

II. Wir führen die Integration gemäß der Substitutionsregel mit $u(x) = x^2 + 8$ und $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x$,

d.h.: $du = 2x dx$ durch:

$$\int 2x(x^2 + 8)^5 dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} = \frac{(x^2 + 8)^6}{6}.$$

Das unbestimmte Integral lautet damit: $\int 2x(x^2 + 8)^5 dx = \frac{(x^2 + 8)^6}{6} + C$ mit C als Integrationskonstante.