Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Stammfunktion

Aufgabe: Berechne das Integral:

$$\int x \cdot \cos(x^2)dx \,.$$

Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals (als Gesamtheit aller Stammfunktionen) verwenden wir die Substitutionsregel (als Umkehrung der Kettenregel für das Ableiten):

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) = F(g(x))$ mit: u = g(x), $u'(x) = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow u'(x)dx = du$.

D.h.: Eine Substitution ist möglich, wenn die Ableitung eines „inneren“ Terms des Integranden als (bis auf eine multiplikative Konstante bestimmter) Faktor im Integral vorhanden ist.

II. Wir führen die Integration gemäß der Substitutionsregel mit u(x) = x^2, $u' = \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow \frac{du}{2} = xdx$ durch:

$$\int x \cdot \cos(x^2)dx = \int \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \cos u du = \frac{1}{2}\sin(u) = \frac{1}{2}\sin(x^2) \,.$$

Das unbestimmte Integral lautet damit: $\int x^2 \cdot \sqrt[3]{1-2x^3}dx = -\frac{1}{8}\sqrt[3]{(1-2x^3)^4}$ + C mit C als Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 12.2015 / Aufgabe 164