Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Stammfunktion

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2}\,dx \,.$$

Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals verwenden wir die Methode der Partialbruchzerlegung des gebrochen rationalen Integranden f(x), d.h. die Zerlegung des Bruches gemäß:

$$f(x) = \frac{c_m x^m + \ldots + c_0}{a(x-x_1)^n \cdot \ldots \cdot (x^2+p_1x+q_1)^o \cdot \ldots} =$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{A_1}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_{n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} + \ldots + \frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{B_{o_1}x+C_{o_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{o_1}} + \ldots\right] \quad (*),$$

wenn nur das Nennerpolynom in lineare und quadratische Faktoren zerlegt ist und das Zählerpolynom einen kleineren Grad als das Nennerpolynom besitzt. Mit den zu bestimmenden reellen Zahlen A_1, … ergibt sich dann die Summe von einfachen Brüchen auf der rechten Seite der Gleichung (*). Diese aus der Partialbruchzerlegung entstehenden einzelnen Integrale werden u.a. nach der Substitutionsregel gelöst:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) = F(g(x)) \text{ mit: } u = g(x),\ u'(x) = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow u'(x)dx = du \,,$$

weiter nach der Potenzregel:

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| \,,\ \int \frac{1}{(x-a)^n}dx = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} \quad (n > 1),$$

schließlich nach den Regeln für quadratische Faktoren:

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \ln|x^2+px+q| \,,\ \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} \quad (n > 1)$$

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right),$$

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^2}dx = \frac{1}{4q-p^2}\left(\frac{2x+p}{x^2+px+q} + \frac{4}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)\right) \quad (4q-p^2 > 0).$$

II. Zerlegung des Nenners der zu integrierenden Funktion: Wir zerlegen zunächst den Nenner des Integranden $f(x) = \frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2}$ in lineare und quadratische Faktoren, was den Term x^3+1 = $(x+1)(x^2-x+1)$ betrifft (es gilt hierbei die Polynomdivision: $(x^3+1):(x+1) = x^2-x+1$). D.h., es ist:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2}=\frac{x^2+1}{x[(x+1)(x^2-x+1)]^2}=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2(x^2-x+1)^2} \quad (**).$$

III. Partialbruchzerlegung: Es gilt der Ansatz:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2(x^2-x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2}{(x+1)^2}+\frac{C_1x+D_1}{x^2-x+1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2-x+1)^2} \quad (***).$$

Multiplikation von (***) mit dem Nenner $x(x+1)^2(x^2-x+1)^2$ des Integranden ergibt:

$$x^2+1=$$
$$A(x+1)^2(x^2-x+1)^2+B_1x(x+1)(x^2-x+1)^2+B_2x(x^2-x+1)^2$$
$$+(C_1x+D_1)x(x+1)^2(x^2-x+1)+(C_2x+D_2)x(x+1)^2 \quad (****)$$

Einsetzen bestimmter x-Werte in (****) führt zunächst auf die Beziehungen:

x = 0: 1 = A
x = -1: 2 = $-9B_2$ => $B_2 = -2/9$
x = 1: 2 = $4A + 2B_1 + B_2 + 2C_1 + 2D_1 + 4C_2 + 4D_2$ => $2B_1 + 2C_1 + 2D_1 + 4C_2 + 4D_2 = -34/9$
x = 2: 5 = $81A + 54B_1 + 18B_2 + 108C_1 + 54D_1 + 36C_2 + 18D_2$ =>
$54B_1 + 108C_1 + 54D_1 + 36C_2 + 18D_2 = -72$
x = -2: 5 = $49A + 98B_1 – 98B_2 + 28C_1 – 14D_1 + 4C_2 – 2D_2$ =>
$98B_1 + 28C_1 – 14D_1 + 4C_2 – 2D_2 = -592/9$
x = 3: 10 = $784A + 441B_1 + 147B_2 + 1008C_1 +336D_1 + 144C_2 + 48D_2$ =>
$441B_1 + 1008C_1 +336D_1 + 144C_2 + 48D_2 = -2224/3$
x = -3: 10 = $676A + 1014B_1 – 507B_2 + 468C_1 – 156D_1 + 36C_2 – 12D_2$ =>
$1014B_1 + 468C_1 – 156D_1 + 36C_2 – 12D_2 = -2336/3$

Die letzten fünf Beziehungen ergeben ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten B_1, C_1, D_1, C_2 und D_2, das mit dem Gauß-Algorithmus lösbar ist:

Lineares Gleichungssystem:

+	18B_1	+	18C_1	+	18D_1	+	36C_2	+	36D_2	=	-34
+	54B_1	+	108C_1	+	54D_1	+	36C_2	+	18D_2	=	-72
+	882B_1	+	252C_1	-	126D_1	+	36C_2	-	18D_2	=	-592
+	1323B_1	+	3024C_1	+	1008D_1	+	432C_2	+	144D_2	=	-2224
+	3042B_1	+	1404C_1	-	468D_1	+	108C_2	-	36D_2	=	-2336

Anfangstableau:

18	18	18	36	36	|	-34
54	108	54	36	18	|	-72
882	252	-126	36	-18	|	-592
1323	3024	1008	432	144	|	-2224
3042	1404	-468	108	-36	|	-2336

1. Schritt: 1*(*2*) - 3*(*1*) / 1*(*3*) - 49*(*1*) / 2*(*4*) - 147*(*1*) / 1*(*5*) - 169*(*1*) /

18	18	18	36	36	|	-34
0	54	0	-72	-90	|	30
0	-630	-1008	-1728	-1782	|	1074
0	3402	-630	-4428	-5004	|	550
0	-1638	-3510	-5976	-6120	|	3410

2. Schritt: 3*(*3*) + 35*(*2*) / 1*(*4*) - 63*(*2*) / 3*(*5*) + 91*(*2*) /

18	18	18	36	36	|	-34
0	54	0	-72	-90	|	30
0	0	-3024	-7704	-8496	|	4272
0	0	-630	108	666	|	-1340
0	0	-10530	-24480	-26550	|	12960

3. Schritt: -24*(*4*) + 5*(*3*) / -56*(*5*) + 195*(*3*) /

18	18	18	36	36	|	-34
0	54	0	-72	-90	|	30
0	0	-3024	-7704	-8496	|	4272
0	0	0	-41112	-58464	|	53520
0	0	0	-131400	-169920	|	107280

4. Schritt: -571*(*5*) + 1825*(*4*) /

18	18	18	36	36	|	-34
0	54	0	-72	-90	|	30
0	0	-3024	-7704	-8496	|	4272
0	0	0	-41112	-58464	|	53520
0	0	0	0	-9672480	|	36417120

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrr}
+ & 18B_1 & + & 18C_1 & + & 18D_1 & + & 36C_2 & + & 36D_2 & = & -34 \\
 & & + & 54C_1 & & & - & 72C_2 & - & 90D_2 & = & 30 \\
 & & & & - & 3024D_1 & - & 7704C_2 & - & 8496D_2 & = & 4272 \\
 & & & & & & - & 41112C_2 & - & 58464D_2 & = & 53520 \\
 & & & & & & & & - & 9672480D_2 & = & 36417120
\end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$D_2 = 1/3$
$C_2 = -1/3$
$D_1 = 1/3$
$C_1 = -5/9$
$B_1 = -4/9$

Die Identität (***) wird damit zu:

$$\frac{x^2+1}{x(x+1)^2(x^2-x+1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{-\frac{4}{9}}{x+1} + \frac{-\frac{2}{9}}{(x+1)^2} + \frac{-\frac{5}{9}x+\frac{1}{3}}{x^2-x+1} + \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}}{(x^2-x+1)^2} =$$

$$\frac{1}{x} - \frac{4}{9}\frac{1}{x+1} - \frac{2}{9}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{9}\frac{5x-3}{x^2-x+1} - \frac{1}{3}\frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}$$ = (1) – (2) – (3) – (4) – (5) (*****).

IV. Wir berechnen nun gemäß

$$\int \frac{x^2+1}{x(x+1)^2(x^2-x+1)^2}dx =$$

$$\int \frac{1}{x}dx - \frac{4}{9}\int \frac{1}{x+1}dx - \frac{2}{9}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx - \frac{1}{9}\int \frac{5x-3}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}dx$$

die aus der Partialbruchzerlegung sich ergebenden <u>Einzelintegrale</u> (1) bis (5) wie folgt:

(1): $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$

(2): $\int \frac{1}{x+1}dx = \ln|x+1|$

(3): $\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = -\frac{1}{x+1}$

nach der Potenzregel, weiter:

$$\int \frac{5x-3}{x^2-x+1}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-\frac{6}{5}}{x^2-x+1}dx = \frac{5}{2}\left(\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \int \frac{\frac{1}{5}}{x^2-x+1}dx \right) =$$

(4): $$\frac{5}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2-x+1}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}dx =$$

$$\frac{5}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\int \frac{x-1}{(x^2-x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{(x^2-x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}dx - \int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx \right) =$$

(5): $$\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx =$$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x^2-x+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{3(x^2-x+1)} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right) =$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1} - \frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3}\frac{x+1}{x^2-x+1} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

gemäß den obigen Regeln für quadratische Nennerfaktoren im Integranden (im Wesentlichen also gemäß der Substitutionsregel).

V. Das Zusammensetzen der Einzelintegrale ergibt gemäß (*****) das gesuchte unbestimmte Integral:

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2}dx =$$

$$\ln|x| - \frac{4}{9}\ln|x+1| - \frac{2}{9}\left(-\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{5}{2}\ln|x^2-x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\frac{x+1}{x^2-x+1} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right) =$$

$$\ln|x| - \frac{4}{9}\ln|x+1| + \frac{2}{9(x+1)} - \frac{5}{18}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{9\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$+\frac{x+1}{9(x^2-x+1)} + \frac{2}{9\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$\ln|x| - \frac{4}{9}\ln|x+1| - \frac{5}{18}\ln|x^2-x+1| + \frac{2}{9(x+1)} + \frac{x+1}{9(x^2-x+1)} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int \frac{x^2+1}{x(x^3+1)^2}dx =$$

$$\ln|x| - \frac{4}{9}\ln|x+1| - \frac{5}{18}\ln|x^2-x+1| + \frac{2}{9(x+1)} + \frac{x+1}{9(x^2-x+1)} + \frac{1}{3\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \text{C}$$

mit C als Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 05.1978, 09.2016 / Aufgabe 247