Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Stammfunktion

Aufgabe: a) Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx\ .$$

b) Ermittle die Bogenlänge der Funktion $y=\sqrt{x}$ auf dem Intervall [0,5; 1].

Lösung: a) I. Das unbestimmte Integral lässt sich durch eine geeignete Substitution gemäß der Substitutionsregel:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx=\int f(u)du=F(u)=F(g(x))$$ mit: u = g(x), $u'(x)=\frac{du}{dx}\Leftrightarrow u'(x)dx=du$,

auf eine Partialbruchzerlegung eines gebrochen rationalen Integranden f(u) zurückführen, d.h.:

$$f(u)=\frac{c_m u^m+...+c_0}{a(u-u_1)^n\cdot...\cdot(u^2+p_1u+q_1)^o\cdot...}=$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{A_1}{u-u_1}+...+\frac{A_{n_1}}{(u-u_1)^{n_1}}+...+\frac{B_1u+C_1}{u^2+p_1u+q_1}+...+\frac{B_{o_1}u+C_{o_1}}{(u^2+p_1u+q_1)^{o_1}}+...\right]\ (*),$$

wenn nur das Nennerpolynom in lineare und quadratische Faktoren zerlegt ist und das Zählerpolynom einen kleineren Grad als das Nennerpolynom besitzt. Mit den zu bestimmenden reellen Zahlen A_1, … ergibt sich dann die Summe von einfachen Brüchen auf der rechten Seite der Gleichung (*). Diese aus der Partialbruchzerlegung entstehenden einzelnen Integrale werden u.a. nach der Potenzregel gelöst:

$$\int\frac{1}{x-a}dx=\ln|x-a|,\ \int\frac{1}{(x-a)^n}dx=-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}\ \text{(n > 1)}.$$

II. Substitution: Wir substituieren $u=\sqrt{1+\frac{1}{4x}}$ und lösen die Gleichung nach x auf:

$$u=\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\Leftrightarrow u^2=1+\frac{1}{4x}\Leftrightarrow u^2-1=\frac{1}{4x}\Leftrightarrow\frac{1}{u^2-1}=4x\Leftrightarrow x=\frac{1}{4(u^2-1)}=\frac{1}{4}(u^2-1)^{-1}.$$

Ableiten ergibt:

$$\frac{dx}{du}=-\frac{1}{4}(u^2-1)^{-2}\cdot 2u=-\frac{1}{2}\frac{u}{(u^2-1)^2}\Rightarrow dx=-\frac{1}{2}\frac{u}{(u^2-1)^2}du\ .$$

Das unbestimmte Integral wird damit zu:

$$\int\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx=\int u\cdot\left(-\frac{1}{2}\frac{u}{(u^2-1)^2}\right)du=-\frac{1}{2}\int\frac{u^2}{(u^2-1)^2}du\ .$$

III. Partialbruchzerlegung: Wir zerlegen zunächst den Nenner des Integranden $f(u)=\frac{u^2}{(u^2-1)^2}=\frac{u^2}{[(u+1)(u-1)]^2}=\frac{u^2}{(u+1)^2(u-1)^2}$ in lineare Faktoren gemäß der 3. binomischen Formel ($a^2–b^2 = (a+b)(a-b)$). Dann gilt der Ansatz:

$$f(u)=\frac{u^2}{(u+1)^2(u-1)^2}=\frac{A}{u+1}+\frac{B}{(u+1)^2}+\frac{C}{u-1}+\frac{D}{(u-1)^2} \quad (*).$$

Multiplikation von (*) mit dem Nenner $(u+1)^2(u-1)^2$ des Integranden ergibt:

$$u^2 = A(u+1)(u-1)^2 + B(u-1)^2 + C(u+1)^2(u-1) + D(u+1)^2$$

und weiter:

$$u^2 = A(u^2-1)(u-1) + B(u^2-2u+1) + C(u+1)(u^2-1) + D(u^2+2u+1) \Leftrightarrow$$

$$u^2 = A(u^3-u^2-u+1) + B(u^2-2u+1) + C(u^3+u^2-u-1) + D(u^2+2u+1) \Leftrightarrow$$

$$u^2 = (A+C)u^3 + (-A+B+C+D)u^2 + (-A-2B-C+2D)u + (A+B-C+D)$$

Auf Grund von:

$$0u^3+1u^2+0u+0 = (A+C)u^3 + (-A+B+C+D)u^2 + (-A-2B-C+2D)u + (A+B-C+D)$$

liefert ein Koeffizientenvergleich mit:

A + C = 0
-A + B + C + D = 1
-A – 2B – C + 2D = 0
A + B – C + D = 0

ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten A, B, C, D, das mit dem Gauß-Algorithmus lösbar ist:

Lineares Gleichungssystem:

+ 1*A* + 1*C* = 0
- 1*A* + 1*B* + 1*C* + 1*D* = 1
- 1*A* - 2*B* - 1*C* + 2*D* = 0
+ 1*A* + 1*B* - 1*C* + 1*D* = 0

Anfangstableau:

1 0 1 0 | 0
-1 1 1 1 | 1
-1 -2 -1 2 | 0
1 1 -1 1 | 0

1. Schritt: 1*(*2*) + 1*(*1*) / 1*(*3*) + 1*(*1*) / 1*(*4*) - 1*(*1*) /

1 0 1 0 | 0
0 1 2 1 | 1
0 -2 0 2 | 0
0 1 -2 1 | 0

2. Schritt: 1*(*3*) + 2*(*2*) / 1*(*4*) - 1*(*2*) /

1 0 1 0 | 0
0 1 2 1 | 1
0 0 4 4 | 2
0 0 -4 0 | -1

3. Schritt: 1*(*4*) + 1*(*3*) /

1 0 1 0 | 0
0 1 2 1 | 1
0 0 4 4 | 2
0 0 0 4 | 1

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned}
+1A \quad\quad\;\; +1C \quad\quad\;\; &= 0\\
+1B + 2C + 1D &= 1\\
+4C + 4D &= 2\\
+4D &= 1
\end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

D = 0.25 = 1/4
C = 0.25 = 1/4
B = 0.25 = 1/4
A = -0.25 = -1/4

Die Identität (*) wird damit zu:

$$\frac{u^2}{(u+1)^2(u-1)^2} = \frac{-\frac{1}{4}}{u+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(u+1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{u-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(u-1)^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{u+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{u-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(u-1)^2}$$

IV. Wir berechnen nun die Stammfunktion in Abhängigkeit von u:

$$\int \frac{u^2}{(u+1)^2(u-1)^2}du = -\frac{1}{4}\int\frac{1}{u+1}du + \frac{1}{4}\int\frac{1}{(u+1)^2}du + \frac{1}{4}\int\frac{1}{u-1}du + \frac{1}{4}\int\frac{1}{(u-1)^2}du =$$

$$-\frac{1}{4}\ln|u+1| - \frac{1}{4}\frac{1}{u+1} + \frac{1}{4}\ln|u-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{u-1} = -\frac{1}{4}\ln|u+1| + \frac{1}{4}\ln|u-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{u+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{u-1}$$

unter Verwendung der Potenzregel.

V. Die Stammfunktion in Abhängigkeit von x ergibt sich schließlich aus der Rücksubstitution mit $u = \sqrt{1+\frac{1}{4x}}$:

$$\int\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{u^2}{(u^2-1)^2}du = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\ln|u+1| + \frac{1}{4}\ln|u-1| - \frac{1}{4}\frac{1}{u+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{u-1}\right) =$$

$$\frac{1}{8}\ln|u+1| - \frac{1}{8}\ln|u-1| + \frac{1}{8}\frac{1}{u+1} + \frac{1}{8}\frac{1}{u-1} = \frac{1}{8}\left(\ln|u+1| - \ln|u-1| + \frac{1}{u+1} + \frac{1}{u-1}\right) =$$

$$\frac{1}{8}\left(\ln\left|\sqrt{1+\frac{1}{4x}}+1\right| - \ln\left|\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1\right| + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}+1} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1}\right)$$

Das gesuchte unbestimmte Integral lautet:

$$\int\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx = \frac{1}{8}\left(\ln\left|\sqrt{1+\frac{1}{4x}}+1\right| - \ln\left|\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1\right| + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}+1} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1}\right) + C$$

mit C als Integrationskonstante.

b) I. Die Bogenlänge L einer Funktion y = f(x) auf einem Intervall [a; b] errechnet sich gemäß der Formel:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

II. Somit ist mit $y=\sqrt{x}$ und $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ auf dem Intervall [0,5; 1] die Bogenlänge:

$$L=\int_{0,5}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx=\int_{0,5}^{1}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx$$

mit Hilfe des unbestimmten Integrals aus Aufgabe/Lösung a) zu bestimmen, also:

$$L=\int_{0,5}^{1}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}dx=\left[\frac{1}{8}\left(\ln\left|\sqrt{1+\frac{1}{4x}}+1\right|-\ln\left|\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1\right|+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}+1}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4x}}-1}\right)\right]_{0,5}^{1}=$$

$$\frac{1}{8}\left(\ln\left(\sqrt{\frac{5}{4}}+1\right)-\ln\left(\sqrt{\frac{5}{4}}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}+1}+\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}-1}\right)-\frac{1}{8}\left(\ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right)-\ln\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-1\right)+\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}+1}+\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}\right)\approx$$

0,5800 [LE]

(LE = Längeneinheiten).

www.michael-buhlmann.de / 05.1978, 09.2016 / Aufgabe 248