Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Stammfunktion

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{\sin x} dx .$$

Lösung: I. Das unbestimmte Integral lässt sich letztlich durch eine geeignete Substitution gemäß der Substitutionsregel:

$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) = F(g(x))$ mit: u = g(x), $u'(x) = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow u'(x)dx = du$,

lösen. Aus der Substitutionsregel folgt nämlich die nachstehende Integrationsregel:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\left| f(x) \right| .$$

II. Zunächst verwenden wir einige trigonometrische Identitäten, u.a.:

$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right),\ \tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)\Big/\cos\left(\frac{x}{2}\right),\ \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Das unbestimmte Integral errechnet sich dann und auf Grund der vorgenannten Beziehungen wie folgt:

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1\Big/\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\Big/\cos\left(\frac{x}{2}\right)} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} dx =$$

$$\int \frac{\frac{1}{2}\left[1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} dx = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

mit C als Integrationskonstante. Dabei wurde im zweiten Schritt der Umformungen der Bruchintegrand um dem Faktor $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ gekürzt, im letzten Schritt wegen $f(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ und

$f'(x) = \left[1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right] \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left[1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]$ (Ableiten nach der Kettenregel mit äußerer und innerer Ableitung) die oben angeführte Integrationsregel verwendet.

www.michael-buhlmann.de / 09.2016 / Aufgabe 249