Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Stammfunktion

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \frac{2x+5}{x^2(x-1)}dx\,.$$

Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals verwenden wir die Methode der Partialbruchzerlegung des gebrochen rationalen Integranden f(x), d.h. die Zerlegung des Bruches gemäß:

$$f(x) = \frac{c_m x^m + ... + c_0}{a(x-x_1)^n \cdot ... \cdot (x^2+p_1x+q_1)^o \cdot ...} =$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{A_1}{x-x_1} + ... + \frac{A_{n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} + ... + \frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1} + ... + \frac{B_{o_1}x+C_{o_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{o_1}} + ...\right] \text{ (*),}$$

wenn nur das Nennerpolynom in lineare und quadratische Faktoren zerlegt ist und das Zählerpolynom einen kleineren Grad als das Nennerpolynom besitzt. Mit den zu bestimmenden reellen Zahlen A_1, … ergibt sich dann die Summe von einfachen Brüchen auf der rechten Seite der Gleichung (*). Diese aus der Partialbruchzerlegung entstehenden einzelnen Integrale werden u.a. gelöst nach der Potenzregel:

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a|\,,\ \int \frac{1}{(x-a)^n}dx = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} \text{ (n > 1).}$$

II. Partialbruchzerlegung: Es gilt der Ansatz:

$$f(x) = \frac{2x+5}{x^2(x-1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B}{(x-1)} \text{ (**).}$$

Multiplikation von (**) mit dem Nenner $x^2(x-1)$ des Integranden ergibt:

$$2x+5 = A_1x(x-1) + A_2(x-1) + Bx^2 \text{ (***)}$$

Einsetzen bestimmter x-Werte in (***) führt zunächst auf die Beziehungen:

x = 0: 0 + 5 = 0 + A_2·(-1) + 0 => -A_2 = 5 => A_2 = -5
x = 1: 2 + 5 = 0 + 0 + B => B = 7
x = 2: 4 + 5 = A_1·2 + A_2 + B·4 => 2A_1 + A_2 + 4B = 9 => 2A_1 – 5 + 28 = 9 => 2A_1 = -14 => A_1 = -7

Die Identität (**) wird damit zu:

$$\frac{2x+5}{x^2(x-1)} = \frac{-7}{x} + \frac{-5}{x^2} + \frac{7}{(x-1)} \text{ = (1) + (2) + (3) (****).}$$

III. Wir berechnen nun gemäß

$$\int \frac{2x+5}{x^2(x-1)}dx = -7\int \frac{1}{x}dx - 5\int \frac{1}{x^2}dx + 7\int \frac{1}{x-1}dx$$

die aus der Partialbruchzerlegung sich ergebenden Einzelintegrale (1) bis (3) wie folgt:

(1): $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

(2): $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}$

(3): $\int \frac{1}{x-1} dx = \ln|x-1|$

nach der Potenzregel.

V. Das Zusammensetzen der Einzelintegrale ergibt gemäß (****) das gesuchte <u>unbestimmte Integral</u>:

$$\int \frac{2x+5}{x^2(x-1)} dx = -7\ln|x| - 5 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) + 7\ln|x-1| = -7\ln|x| + \frac{5}{x} + 7\ln|x-1| .$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int \frac{2x+5}{x^2(x-1)} dx = -7\ln|x| + \frac{5}{x} + 7\ln|x-1| + C$$

mit C als Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 09.2016 / Aufgabe 250