Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Stammfunktion

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \frac{12}{x(x^2+1)}dx .$$

Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals verwenden wir die Methode der Partialbruchzerlegung des gebrochen rationalen Integranden f(x), d.h. die Zerlegung des Bruches gemäß:

$$f(x) = \frac{c_m x^m + ... + c_0}{a(x-x_1)^n \cdot ... \cdot (x^2+p_1x+q_1)^o \cdot ...} =$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{A_1}{x-x_1} + ... + \frac{A_{n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} + ... + \frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1} + ... + \frac{B_{o_1}x+C_{o_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{o_1}} + ...\right] \text{ (*)},$$

wenn nur das Nennerpolynom in lineare und quadratische Faktoren zerlegt ist und das Zählerpolynom einen kleineren Grad als das Nennerpolynom besitzt. Mit den zu bestimmenden reellen Zahlen A_1, … ergibt sich dann die Summe von einfachen Brüchen auf der rechten Seite der Gleichung (*). Diese aus der Partialbruchzerlegung entstehenden einzelnen Integrale werden u.a. gelöst nach der Potenzregel:

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| , \int \frac{1}{(x-a)^n}dx = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} \text{ (n > 1)},$$

schließlich nach Regeln für quadratische Faktoren, u.a.:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1) \text{ (gemäß der Substitutionsregel)},$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x \text{ (als Grundintegral)}.$$

II. Partialbruchzerlegung: Es gilt der Ansatz:

$$f(x) = \frac{12}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \text{ (**)}.$$

Multiplikation von (**) mit dem Nenner $x(x^2+1)$ des Integranden ergibt:

$$12 = A(x^2+1) + (Bx+C)x = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx = (A+B)x^2 + Cx + A \text{ (***)}$$

Die Gleichung (***) liefert auf Grund von

$$(A+B)x^2 + Cx + A = 0x^2 + 0x + 12$$

mit Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem:

A+B = 0
C = 0
A = 12.

Aus A=12 folgt wegen A+B=0 noch: B = -12. Die Identität (**) wird damit zu:

$$\frac{12}{x(x^2+1)} = \frac{12}{x} + \frac{-12x}{x^2+1}$$ = (1) + (2) (****).

III. Wir berechnen nun gemäß

$$\int \frac{12}{x(x^2+1)}dx = 12\int \frac{1}{x}dx - 12\int \frac{x}{x^2+1}dx$$

die aus der Partialbruchzerlegung sich ergebenden <u>Einzelintegrale</u> (1) und (2) wie folgt:

(1): $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|$

(2): $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

nach den Regeln für lineare und quadratische Nennerfaktoren der Partialbruchzerlegung.

V. Das Zusammensetzen der Einzelintegrale ergibt gemäß (****) das gesuchte <u>unbestimmte Integral</u>:

$$\int \frac{12}{x(x^2+1)}dx = 12\ln|x| - 12\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2+1) = 12\ln|x| - 6\ln(x^2+1).$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int \frac{12}{x(x^2+1)}dx = 12\ln|x| - 6\ln(x^2+1) + C$$

mit C als Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 09.2016 / Aufgabe 251