Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Stammfunktion

Aufgabe: Berechne für reelles a≠0 das Integral:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \,.$$

Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals (als Gesamtheit aller Stammfunktionen) verwenden wir a) die Substitutionsregel:

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) = F(g(x))$ mit: u = g(x), $u'(x) = \frac{du}{dx} \Leftrightarrow u'(x)dx = du$,

b) die Produktintegration (partielle Integration):

$\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$, $\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx$.

II. Im unbestimmten Integral klammern wir aus der Wurzel a^2 als a aus und erhalten:

$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int a\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = a\int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx$ = (1).

Nun substituieren wir: $\frac{x}{a} = \sin u \Rightarrow x = a\sin u$, $\frac{dx}{du} = a\cos u \Rightarrow dx = a\cos u\,du$ (Substitutions-regel) und erhalten:

(1) = $a\int \sqrt{1 - \sin^2 u} \cdot a\cos u\,du = a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 u} \cdot \cos u\,du$ = (2).

Es gilt nun die trigonometrische Beziehung $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$, so dass $\cos^2 u = 1 - \sin^2 u$ => $\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u}$ folgt und damit:

(2) = $a^2 \int \cos u \cdot \cos u\,du = a^2 \int \cos^2 u\,du$ = (3).

Der Ausdruck (3) ist aber ein Integral, das wir mit Produktintegration lösen können.

III. Wir führen dazu die Produktintegration für das Integral $\int \cos^2 x\,dx$ einmal durch:

$\int \cos^2 x\,dx = \int \cos x \cdot \cos x\,dx = \sin x \cdot \cos x - \int \sin x \cdot (-\sin x)dx =$

$\sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x\,dx = \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x)dx = \sin x \cdot \cos x + \int 1dx - \int \cos^2 x\,dx =$

$\sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x\,dx = x + \sin x \cdot \cos x - \int \cos^2 x\,dx$ (*)

mit: $u'(x) = \cos x$, $u(x) = \sin x$, $v(x) = \cos x$, $v'(x) = -\sin x$ und wegen: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Die Gleichung (*) ist nach $\int \cos^2 x\,dx$ umzuformen, also:

$\int \cos^2 x\,dx = x + \sin x \cdot \cos x - \int \cos^2 x\,dx \qquad | + \int \cos^2 x\,dx$

$2\int \cos^2 x dx = x + \sin x \cdot \cos x$ | :2

$\int \cos^2 x dx = \frac{x + \sin x \cdot \cos x}{2}$

Das unbestimmte Integral lautet damit: $\int \cos^2 x dx = \frac{x + \sin x \cdot \cos x}{2}$ + C (**) mit C als reeller Integrationskonstante.

IV. Wir fahren fort mit dem Integral (3) und haben gemäß der obigen Produktintegration und (**):

(3) = $a^2 \int \cos^2 u du = a^2 \left(\frac{u + \sin u \cdot \cos u}{2} \right)$ = (4).

Rücksubstitution erfolgt nun mit: $\sin u = \frac{x}{a}$, $\sin u = \frac{x}{a} \Rightarrow u = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$, $\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$, so dass gilt:

(4) = $a^2 \left(\frac{\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}{2} \right) = \frac{a^2}{2} \left(\arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{a} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) =$

$\frac{1}{2} \left(a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + ax \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \right) = \frac{1}{2} \left(a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \right)$.

V. Damit errechnet sich das gesuchte unbestimmte Integral als:

$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \right)$ + C mit C als reeller Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 06.2019 / Aufgabe 857