**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Analysis
## > Stammfunktion

---

**Aufgabe**: Berechne eine Stammfunktion F(x) der Funktion

f(x) = $\frac{x}{\cos^2 x}$.

**Lösung**: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals (als Gesamtheit aller Stammfunktionen) verwenden wir die Produktintegration (partielle Integration) gemäß der Regel:

$$\int u'(x)\cdot v(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)\cdot v'(x)dx\,,\ \int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)dx$$

II. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Substitutionsregel:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u))\cdot g'(u)du$$

mit: x = g(u), du = g'(u)du bzw.:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

mit: u = g(x), du = g'(x)dx. Ein Spezialfall der Substitution ist:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|.$$

III. Wir führen Integration von f(x) = $\frac{x}{\cos^2 x}$ mit Hilfe der partiellen Integration und der Substitution durch. Es gilt:

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \int x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx \underset{\left\{\substack{u=x,v'=\frac{1}{\cos^2 x}\\ u'=1,v=\tan x}\right\}}{=} x\tan x - \int 1\cdot\tan x dx =$$

$$x\tan x - \int \tan x dx = x\tan x - \int\frac{\sin x}{\cos x}dx = x\tan x + \int\frac{-\sin x}{\cos x}dx \underset{\left\{\substack{u=\cos x\\ du=-\sin x dx}\right\}}{=}$$

$$x\tan x + \int\frac{1}{u}du = x\tan x + \ln|u| \underset{\cos x=u}{=} x\tan x + \ln|\cos x|$$

Eine gesuchte Stammfunktion lautet damit:

F(x) = $x\tan x + \ln|\cos x|$.

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1269