

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Unbestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \cos^3 x dx.$$

Lösung: I. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Substitutionsregel:

$$\int f(x) dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u) du$$

mit: $x = g(u)$, $du = g'(u) du$ bzw.:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

mit: $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$. Ein Spezialfall der Substitution ist:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|.$$

II. Wir führen die Integration unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) (*)$$

und mit Hilfe einer Substitution durch. Es gilt dabei:

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot \cos x dx \stackrel{(*)}{=} \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{array} \right\}}{=} \int (1 - u^2) du = u - \frac{1}{3} u^3 \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} \sin x = u \end{array} \right\}}{=}$$

$$\sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x.$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int \cos^3 x dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C \quad \text{mit } C \text{ als Integrationskonstante.}$$