

# Mathematikaufgaben

## > Analysis

## > Unbestimmtes Integral

---

**Aufgabe:** Berechne das unbestimmte Integral

$$\int x\sqrt{1+x^2} dx.$$

**Lösung:** I. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Substitutionsregel:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)du$$

mit:  $x = g(u)$ ,  $du = g'(u)du$  bzw.:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

mit:  $u = g(x)$ ,  $du = g'(x)dx$ . Ein Spezialfall der Substitution ist:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)|.$$

II. Wir führen die Integration mit Hilfe einer Substitution durch. Es gilt dabei:

$$\int x\sqrt{1+x^2} dx \stackrel{\substack{u=1+x^2 \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dx}=2x \Leftrightarrow du=2x dx \Leftrightarrow \frac{du}{2}=x dx \end{array} \right\}}}{=} \int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} u^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}} \stackrel{u=1+x^2}{=} \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \sqrt{(1+x^2)^3}.$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{3} \sqrt{(1+x^2)^3} + C \text{ mit } C \text{ als Integrationskonstante.}$$