

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Unbestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \sin^{2n+1} x dx, n \in \mathbf{N}_0.$$

Lösung: I. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Substitutionsregel:

$$\int f(x) dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u) du$$

mit: $x = g(u)$, $du = g'(u) du$ bzw.:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du$$

mit: $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$.

II. Es gilt der binomische Lehrsatz:

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} = (a+b)^n \quad (a, b \text{ reell}).$$

III. Wir führen die Integration mit Hilfe der trigonometrischen Beziehung $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, einer Substitution sowie des binomischen Lehrsatzes wie folgt durch:

$$\int \sin^{2n+1} x dx = \int \sin x \cdot \sin^{2n} x dx = \int \sin x \cdot (\sin^2 x)^n dx = \int \sin x \cdot (1 - \cos^2 x)^n dx =$$

$$\int (1 - \cos^2 x)^n \sin x dx \stackrel{\substack{u = \cos x \\ du = -\sin x dx}}{=} - \int (1 - u^2)^n du = - \int \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-u^2)^i \cdot 1^{n-i} du = - \int \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-u^2)^i du =$$

$$- \int \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} u^{2i} du = - \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \frac{u^{2i+1}}{2i+1} \stackrel{\{\cos x = u\}}{=} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{\cos^{2i+1} x}{2i+1}.$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int \sin^{2n+1} x dx = \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{\cos^{2i+1} x}{2i+1} + C \quad \text{mit } C \text{ als Integrationskonstante.}$$

IV. Für die ersten natürlichen Zahlen einschließlich 0 ergeben sich die nachstehenden Formeln:

n=	Integral
0	$\int \sin x dx = -\cos x$
1	$\int \sin^3 x dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x$
2	$\int \sin^5 x dx = -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x$
3	$\int \sin^7 x dx = -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x$
4	$\int \sin^9 x dx = -\sin x + \frac{4}{3} \cos^3 x - \frac{6}{5} \cos^5 x + \frac{4}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x$
	usw.

www.michael-buhlmann.de / 04.2021 / Aufgabe 1366