Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Unbestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}\,dx\,.$$

Lösung: I. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Substitutionsregel:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u))\cdot g'(u)du$$

mit: x = g(u), du = g'(u)du bzw.:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

mit: u = g(x), du = g'(x)dx. Ein Spezialfall der Substitution ist:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|\,.$$

Weiterhin gibt es noch das Grundintegral:

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x\,.$$

II. Wir führen die Integration durch mit Hilfe der Substitutionsregel, der sich aus der Substitutionsregel ergebenden Beziehung: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$ und unter Verwendung des arctan-Grundintegrals:

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}dx = \int \frac{x}{x^2+4x+4+1}dx = \int \frac{x}{(x+2)^2+1}dx = \int \frac{x+2-2}{(x+2)^2+1}dx =$$

$$\int \frac{x+2}{(x+2)^2+1}dx - \int \frac{2}{(x+2)^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1}dx - \int \frac{2}{(x+2)^2+1}dx \underset{\left\{\substack{z=x+2\\ dz=dx}\right\}}{=}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2(x+2)}{(x+2)^2+1}dx - \int \frac{2}{z^2+1}dz \underset{\left\{\substack{u(x)=(x+2)^2+1\\ u'(s)=2(x+2)}\right\}}{=} \frac{1}{2}\ln((x+2)^2+1) - 2\arctan z \underset{\{z=x+2\}}{=}$$

$$\frac{1}{2}\ln((x+2)^2+1) - 2\arctan(x+2).$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int \frac{x}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\ln((x+2)^2+1) - 2\arctan(x+2) + C$$ mit C als Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 04.2021 / Aufgabe 1369