Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Unbestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \frac{5x+3}{x^3+2x^2+x}\,dx \,.$$

Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals verwenden wir die Methode der Partialbruchzerlegung des gebrochen rationalen Integranden f(x), d.h. die Zerlegung des Bruches gemäß:

$$f(x) = \frac{c_m x^m + ... + c_0}{a(x-x_1)^n \cdot ... \cdot (x^2+p_1x+q_1)^o \cdot ...} =$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{A_1}{x-x_1} + ... + \frac{A_{n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} + ... + \frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1} + ... + \frac{B_{o_1}x+C_{o_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{o_1}} + ...\right] \text{ (*)},$$

wenn nur das Nennerpolynom in lineare und quadratische Faktoren zerlegt ist und das Zählerpolynom einen kleineren Grad als das Nennerpolynom besitzt. Mit den zu bestimmenden reellen Zahlen A_1, … ergibt sich dann die Summe von einfachen Brüchen auf der rechten Seite der Gleichung (*). Diese aus der Partialbruchzerlegung entstehenden einzelnen Integrale werden u.a. gelöst nach der Potenzregel:

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a| \,,\; \int \frac{1}{(x-a)^n}dx = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} \text{ (n > 1)},$$

schließlich nach Regeln für quadratische Faktoren, u.a.:

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1) \text{ (gemäß der Substitutionsregel)},$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan x \text{ (als Grundintegral)}.$$

II. Wir führen die Integration mit Hilfe der Partialbruchzerlegung durch und haben für den Integranden $f(x) = \frac{5x+3}{x^3+2x^2+x}$ den Ansatz:

$$f(x) = \frac{5x+3}{x^3+2x^2+x} = \frac{5x+3}{x(x^2+2x+1)} = \frac{5x+3}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \text{ (**)}.$$

Multiplikation von (**) mit dem Nenner $x(x+1)^2$ des Integranden ergibt:

$$5x+3 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx = Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx =$$

$$(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A \text{ (***)}$$

Die Gleichung (***) liefert auf Grund von

$$(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A = 0x^2 + 5x + 3$$

mit Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem:

A+B = 0
2A+B+C = 5
A = 3.

Mit A = 3 folgt: 3+B = 0 ⇔ B = -3, weiter mit A = 3, B = -3: 2·3–3+C = 5 ⇔ 3+C = 5 ⇔ C = 2. Es gilt also die Identität:

$$f(x) = \frac{5x+3}{x^3+2x^2+x} = \frac{3}{x} - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \quad (****).$$

III. Integration ergibt gemäß (****):

$$\int \frac{5x+3}{x^3+2x^2+x}\,dx = \int \left(\frac{3}{x} - \frac{3}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \right) dx = \int \frac{3}{x}\,dx - \int \frac{3}{x+1}\,dx + \int \frac{2}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$3\ln|x| - 3\ln|x+1| - \frac{2}{x+1} = 3\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{2}{x+1}.$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int \frac{5x+3}{x^3+2x^2+x}\,dx = 3\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| - \frac{2}{x+1} + C$$ mit C als Integrationskonstante.

www.michael-buhlmann.de / 04.2021 / Aufgabe 1370