

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Unbestimmtes Integral

Aufgabe: Berechne das unbestimmte Integral

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Lösung: I. Wir verwenden die Produktintegration (partielle Integration) gemäß der Regel:

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx, \quad \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx.$$

Weiterhin gibt es noch das Grundintegral:

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x.$$

II. Wir führen die Integration mit Hilfe der Produktintegration durch und haben zunächst:

$$\arctan x = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int 1 \cdot \frac{1}{x^2 + 1} dx \stackrel{\substack{u'=1, u=x \\ v=\frac{1}{x^2+1}, v'=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}}}{=} x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} - \int x \cdot \left(-\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \right) dx =$$

$$\frac{x}{x^2 + 1} + \int \frac{2x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{x}{x^2 + 1} + 2 \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{x}{x^2 + 1} + 2 \int \frac{x^2 + 1 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx =$$

$$\frac{x}{x^2 + 1} + 2 \left(\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} dx - \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \right) = \frac{x}{x^2 + 1} + 2 \left(\int \frac{1}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \right) =$$

$$\frac{x}{x^2 + 1} + 2 \left(\arctan x - \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \right) = \frac{x}{x^2 + 1} + 2 \arctan(x) - 2 \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

und damit eine Gleichung, die das zu berechnende Integral enthält. Auflösen der Gleichung:

$$\arctan x = \frac{x}{x^2 + 1} + 2 \arctan x - 2 \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

ergibt:

$$\arctan x = \frac{x}{x^2 + 1} + 2 \arctan x - 2 \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \quad | - \arctan x$$

$$0 = \frac{x}{x^2 + 1} + \arctan x - 2 \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx \quad | + 2 \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$2 \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{x}{x^2 + 1} + \arctan x \quad | :2$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \arctan x \right).$$

Das unbestimmte Integral lautet damit:

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x^2 + 1} + \arctan x \right) + C \text{ mit } C \text{ als Integrationskonstante.}$$

www.michael-buhlmann.de / 04.2021 / Aufgabe 1372