Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Unbestimmtes Integral

Aufgabe: Zeige, dass die folgende Integralformel gilt:

$$\int \cos^{2n} x dx = \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{2j-1}{2j} \right) x + \sin x \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=i+1}^{n} \frac{2j-1}{2j} \right) \cdot \frac{1}{2i} \cos^{2i-1} x + C \text{, } n\varepsilon\mathbf{N}.$$

Lösung: I. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Produktintegration:

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

als Folgerung aus der Produktregel für Ableitungen.

II. Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen nε**N** die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein n=k_0 ε**N** (meist n=0 oder n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;
3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;
4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen nε**N**.

III. Wir verwenden das Beweisverfahren der vollständigen Induktion und beweisen als Induktionsanfang für n=1 die angeführte Formel. Dazu verwenden wir die Produktintegration und haben unter Verwendung der trigonometrischen Formel $\sin^2(x)+\cos^2(x) = 1$:

$$\int \cos^2 x dx = \int \cos x \cdot \cos x dx \underset{\left\{ \begin{array}{l} u'=\cos x \Rightarrow u=\sin x \\ v=\cos x \Rightarrow v'=-\sin x \end{array} \right\}}{=} \sin x \cdot \cos x - \int \sin x \cdot (-\sin x) dx =$$

$$\sin x \cdot \cos x + \int \sin^2 x dx = \sin x \cdot \cos x + \int (1-\cos^2 x) dx = \sin x \cdot \cos x + \int 1 dx - \int \cos^2 x dx =$$

$$\sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x dx.$$

Die Gleichung

$$\int \cos^2 x dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x dx$$

lässt sich dann noch umstellen:

$$\int \cos^2 x dx = \sin x \cdot \cos x + x - \int \cos^2 x dx \qquad | + \int \cos^2 x dx$$

$$2\int \cos^2 x dx = \sin x \cdot \cos x + x \qquad | :2$$

$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x$,

so dass wegen i=n=1 mit $\prod_{j=1}^{1} \frac{2j-1}{2j} = \frac{1}{2}$ und $\prod_{j=2}^{1} \frac{2j-1}{2j} = 1$ (leeres Produkt) die rechte Seite der zu beweisenden Integralformel trägt.

IV. Die Induktionsannahme sei:

$$\int \cos^{2k} x dx = \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \right) x + \sin x \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=i+1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \right) \cdot \frac{1}{2i} \cos^{2i-1} x + C \quad (*)$$

für ein gewisses n=k. Die Induktionsbehauptung für n=k+1:

$$\int \cos^{2(k+1)} x dx = \left(\prod_{j=1}^{k+1} \frac{2j-1}{2j} \right) x + \sin x \cdot \sum_{i=1}^{k+1} \left(\prod_{j=i+1}^{k+1} \frac{2j-1}{2j} \right) \cdot \frac{1}{2i} \cos^{2i-1} x + C$$

ist dann unter Verwendung von (*) zu beweisen. In der Tat gilt ähnlich wie beim Beweis des Induktionsanfangs:

$$\int \cos^{2(k+1)} x dx = \int \cos^{2k+2} x dx = \int \cos x \cdot \cos^{2k+1} x dx \underset{\left\{ \substack{u'=\cos x \Rightarrow u=\sin x \\ v=\cos^{2k+1} x \Rightarrow v'=-(2k+1)\sin x \cos^{2k} x} \right\}}{=}$$

$$\sin x \cdot \cos^{2k+1} x - \int \sin x \cdot (-(2k+1)\sin x \cos^{2k} x) dx =$$

$$\sin x \cdot \cos^{2k+1} x + (2k+1)\int \sin^2 x \cdot \cos^{2k} x dx =$$

$$\sin x \cdot \cos^{2k+1} x + (2k+1)\int (1-\cos^2 x) \cdot \cos^{2k} x dx =$$

$$\sin x \cdot \cos^{2k+1} x + (2k+1)\int (\cos^{2k} x - \cos^{2k+2} x) dx =$$

$$\sin x \cdot \cos^{2k+1} x + (2k+1)\int \cos^{2k} x dx - (2k+1)\int \cos^{2k+2} x dx \underset{(*)}{=}$$

$$\sin x \cdot \cos^{2k+1} x + (2k+1)\left(\left(\prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \right) x + \sin x \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=i+1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \right) \cdot \frac{1}{2i} \cos^{2i-1} x \right) - (2k+1)\int \cos^{2k+2} x dx$$

$\Rightarrow$

$$\int \cos^{2k+2} x dx =$$

$$\sin x \cdot \cos^{2k+1} x + (2k+1)\left(\left(\prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \right) x + \sin x \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=i+1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \right) \cdot \frac{1}{2i} \cos^{2i-1} x \right) - (2k+1)\int \cos^{2k+2} x dx \Leftrightarrow$$

$$(2k+2)\int \cos^{2k+2} x dx = \sin x \cdot \cos^{2k+1} x + (2k+1)\left(\left(\prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \right) x + \sin x \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=i+1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \right) \cdot \frac{1}{2i} \cos^{2i-1} x \right) \Leftrightarrow$$

$$\int \cos^{2k+2} x dx = \frac{2k+1}{2k+2}\left(\left(\prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \right) x + \sin x \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=i+1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \right) \cdot \frac{1}{2i} \cos^{2i-1} x \right) + \frac{1}{2k+2} \cdot \sin x \cdot \cos^{2k+1} x$$

$\Rightarrow$

$$\int \cos^{2(k+1)} x dx =$$

$$\frac{2k+1}{2k+2}\left(\left(\prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \right) x + \sin x \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\prod_{j=i+1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \right) \cdot \frac{1}{2i} \cos^{2i-1} x \right) + \frac{1}{2k+2} \cdot \sin x \cdot \cos^{2k+1} x =$$

$$\left(\frac{2k+1}{2k+2} \cdot \prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \right) x + \sin x \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{2k+1}{2k+2} \cdot \prod_{j=i+1}^{k} \frac{2j-1}{2j} \right) \cdot \frac{1}{2i} \cos^{2i-1} x + \frac{1}{2k+2} \cdot \sin x \cdot \cos^{2k+1} x =$$

$$\left(\prod_{j=1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)x+\sin x\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=i+1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\cos^{2i-1}x+\frac{1}{2k+2}\cdot\sin x\cdot\cos^{2k+1}x=$$

$$\left(\prod_{j=1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)x+\sin x\cdot\sum_{i=1}^{k}\left(\prod_{j=i+1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\cos^{2i-1}x+\sin x\cdot\left(\prod_{j=k+2}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2(k+1)}\cdot\cos^{2(k+1)-1}x=$$

$$\left(\prod_{j=1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)x+\sin x\cdot\sum_{i=1}^{k+1}\left(\prod_{j=i+1}^{k+1}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\cos^{2i-1}x,$$

was zu beweisen war. Es gilt also die oben angegebene Integralformel:

$$\int\cos^{2n}x\,dx=\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{2j-1}{2j}\right)x+\sin x\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=i+1}^{n}\frac{2j-1}{2j}\right)\cdot\frac{1}{2i}\cos^{2i-1}x+C\text{ , n}\varepsilon\mathbf{N}.$$

V. Für die ersten natürlichen Zahlen ergeben sich die nachstehenden Formeln:

n=	Integral
1	$\int\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x$
2	$\int\cos^4 x\,dx=\frac{3}{8}x+\frac{3}{8}\sin x\cdot\cos x+\frac{1}{4}\sin x\cdot\cos^3 x$
3	$\int\cos^6 x\,dx=\frac{5}{16}x+\frac{5}{16}\sin x\cdot\cos x+\frac{5}{24}\sin x\cdot\cos^3 x+\frac{1}{6}\sin x\cdot\cos^5 x$
4	$\int\cos^8 x\,dx=\frac{35}{128}x+\frac{35}{128}\sin x\cdot\cos x+\frac{35}{192}\sin x\cdot\cos^3 x+\frac{7}{48}\sin x\cdot\cos^5 x+\frac{1}{8}\sin x\cdot\cos^7 x$
	usw.

www.michael-buhlmann.de / 03.2022 / Aufgabe 1625