Mathematikaufgaben

> Analysis

> Stammfunktion

Aufgabe: Zu bestimmen ist eine Stammfunktion $F(x)$ zur Funktion:

$$f(x) = x^4 \cdot e^{3x}.$$

1. Lösung: I. Wir verwenden die Produktintegration (partielle Integration) gemäß der Regel:

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx, \quad \int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Dabei ergibt sich nach dem vorgegebenem Produkt = Polynom * Exponentialfunktion im Integranden die folgende Vorgehensweise: Wähle als $v'(x)$ die Exponentialfunktion, als $u(x)$ das Polynom n . Grades. Nach n -maliger Anwendung der Produktintegration ist das entsprechende Integral vollständig gelöst.

II. Zur Bestimmung einer Stammfunktion $F(x)$ der Funktion $f(x) = x^4 \cdot e^{3x}$ gilt gemäß der Produktintegration:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int x^4 e^{3x} dx \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} u(x)=x^4 \Rightarrow u'(x)=4x^3 \\ v'(x)=e^{3x} \Rightarrow v(x)=\frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right\}}{=} x^4 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int 4x^3 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^4 e^{3x} - \frac{4}{3} \int x^3 e^{3x} dx \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} u(x)=x^3 \Rightarrow u'(x)=3x^2 \\ v'(x)=e^{3x} \Rightarrow v(x)=\frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right\}}{=} \\ &= \frac{1}{3} x^4 e^{3x} - \frac{4}{3} \left[x^3 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int 3x^2 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} dx \right] = \frac{1}{3} x^4 e^{3x} - \frac{4}{9} x^3 e^{3x} + \frac{4}{3} \int x^2 e^{3x} dx \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} u(x)=x^2 \Rightarrow u'(x)=2x \\ v'(x)=e^{3x} \Rightarrow v(x)=\frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right\}}{=} \\ &= \frac{1}{3} x^4 e^{3x} - \frac{4}{9} x^3 e^{3x} + \frac{4}{3} \left[x^2 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int 2x \cdot \frac{1}{3} e^{3x} dx \right] = \\ &= \frac{1}{3} x^4 e^{3x} - \frac{4}{9} x^3 e^{3x} + \frac{4}{9} x^2 e^{3x} - \frac{8}{9} \int x e^{3x} dx \stackrel{\left\{ \begin{array}{l} u(x)=x \Rightarrow u'(x)=1 \\ v'(x)=e^{3x} \Rightarrow v(x)=\frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right\}}{=} \\ &= \frac{1}{3} x^4 e^{3x} - \frac{4}{9} x^3 e^{3x} + \frac{4}{9} x^2 e^{3x} - \frac{8}{9} \left[x \cdot \frac{1}{3} e^{3x} - \int 1 \cdot \frac{1}{3} e^{3x} dx \right] = \\ &= \frac{1}{3} x^4 e^{3x} - \frac{4}{9} x^3 e^{3x} + \frac{4}{9} x^2 e^{3x} - \frac{8}{27} x e^{3x} + \frac{8}{27} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} x^4 e^{3x} - \frac{4}{9} x^3 e^{3x} + \frac{4}{9} x^2 e^{3x} - \frac{8}{27} x e^{3x} + \frac{8}{81} e^{3x} = \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{27}x + \frac{8}{81}\right)e^{3x}.$$

Eine Stammfunktion lautet damit: $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{27}x + \frac{8}{81}\right)e^{3x}.$

2. Lösung: I. Zur Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx}$$

mit vorgegebenen reellen Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, r \neq 0$ ist eine Stammfunktion $F(x)$:

$$F(x) = (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) \cdot e^{rx}$$

mit zu bestimmenden $b_0, b_1, \dots, b_n$. Da die Funktion $f(x)$ sich als Ableitung einer Stammfunktion $F(x)$ darstellt ($F'(x) = f(x)$), gelten die Beziehungen:

$$\alpha_n = r b_n$$

$$\alpha_k = (k+1)b_{k+1} + r b_k, \quad k = 0, \dots, n-1 (**),$$

so dass sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \dots \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & r & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \dots \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

ergibt. Das lineare Gleichungssystem ist nach den Unbekannten $b_0, b_1, \dots, b_n$ eindeutig auflösbar, da die in der Haupt- und einer Nebendiagonalen mit nicht verschwindenden Elementen r und $n, n-1, \dots, 1$ besetzte $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix invertierbar ist. Zu den Funktionen vom Typ $f(x) = (\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0) \cdot e^{rx}$ existieren damit geschlossen darstellbare Stammfunktionen $F(x) = (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) \cdot e^{rx}$ vom selben Typ.

Die Bestimmung der Unbekannten $b_0, b_1, \dots, b_n$ geschieht mit Hilfe der Matrixinversen bei Matrixinversion mit den Gauß-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \dots \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & r & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & r \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-2} \\ \dots \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

II. Zur Funktion $f(x) = x^4 \cdot e^{3x}$ bilden wir mit $r = 3$ und $n = 4$ (Polynom 4. Grades) die folgende 5x5-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix wird mit dem Gauß-Algorithmus invertiert:

Matrix | Einheitsmatrix ->

Anfangstableau:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

1. Schritt: $3 \cdot (2) - 4 \cdot (1) /$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

2. Schritt: $3 \cdot (3) - 1 \cdot (2) /$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 4 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

3. Schritt: $9 \cdot (4) - 2 \cdot (3) /$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 4 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & -8 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

4. Schritt: $27 \cdot (5) - 1 \cdot (4) /$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 4 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & -8 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 8 & -6 & -9 \end{array}$$

5. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & -4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 4 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & -8 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 8 & -6 & -9 \end{array}$$

Teilen: (1):3 / (2):9 / (3):9 / (4):27 / (5):81 /

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4/9 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4/9 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -8/27 & 2/9 & -2/9 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8/81 & -2/27 & 2/27 & -1/9 \end{array}$$

-> Einheitsmatrix E | Matrix A^{-1}

Mit der Matrixinversen berechnen sich zu $f(x) = x^4 \cdot e^{3x}$ mit $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 1$ die gesuchten Koeffizienten der Stammfunktion als:

$$\begin{pmatrix} b_4 \\ b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{8}{27} & \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{8}{81} & -\frac{2}{27} & \frac{2}{27} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} \\ -\frac{8}{27} \\ \frac{8}{81} \end{pmatrix}$$

Eine Stammfunktion lautet daher: $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{27}x + \frac{8}{81} \right) e^{3x}$.

3. Lösung: I. Für unbestimmte Integrale vom Typ $\int x^n e^{rx} dx$, n als natürliche Zahl, r reell, gilt die explizite Darstellung einer Stammfunktion:

$$\int x^n e^{rx} dx = \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{r^{k+1}} \cdot x^{n-k} \right) e^{rx} = \frac{1}{r} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{r^k} \cdot x^{n-k} \right) e^{rx} \quad (*)$$

II. Mit $n=4, r=3$ gilt gemäß (*) für das unbestimmte Integral:

$$\begin{aligned} \int x^4 e^{3x} dx &= \left(\sum_{k=0}^4 (-1)^k \cdot \frac{4!}{(4-k)!} \cdot \frac{1}{3^{k+1}} \cdot x^{4-k} \right) e^{3x} = \\ &= \left((-1)^0 \cdot \frac{4!}{4!} \cdot \frac{1}{3^1} \cdot x^4 + (-1)^1 \cdot \frac{4!}{3!} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot x^3 + (-1)^2 \cdot \frac{4!}{2!} \cdot \frac{1}{3^3} \cdot x^2 + (-1)^3 \cdot \frac{4!}{1!} \cdot \frac{1}{3^4} \cdot x + (-1)^4 \cdot \frac{4!}{0!} \cdot \frac{1}{3^5} \cdot x^0 \right) e^{3x} = \\ &= \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{12}{27}x^2 - \frac{24}{81}x + \frac{24}{243} \right) e^{3x} = \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{27}x + \frac{8}{81} \right) e^{3x}. \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion lautet daher: $F(x) = \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{27}x + \frac{8}{81} \right) e^{3x}$.