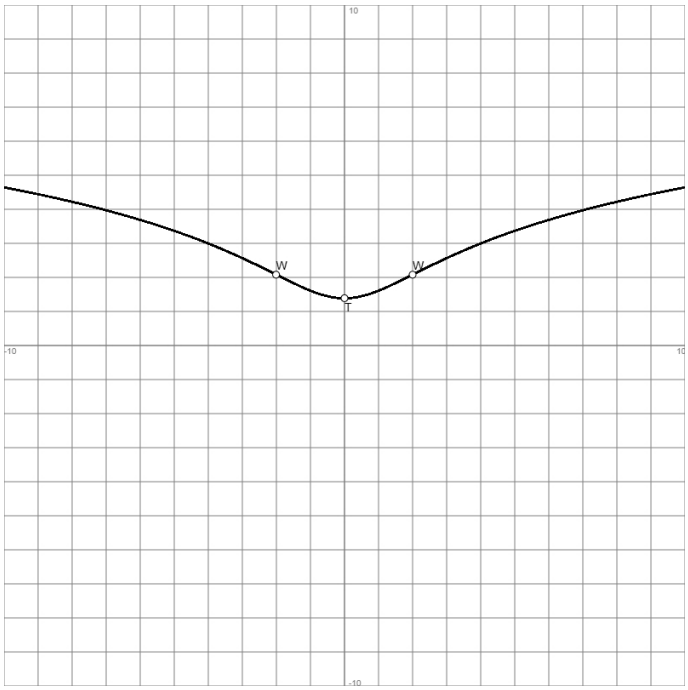
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Stammfunktion

Aufgabe: Gesucht ist eine Stammfunktion von $f(x) = \ln(x^2 + 4)$.



Lösung: I. Zur Berechnung einer Stammfunktionen verwenden wir die Produktintegration (partielle Integration) gemäß der Regel:

$$\int u'(x) \cdot v(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx \,,\ \int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx \,.$$

II. Es gilt beim Integrieren eines unbestimmten Integrals die Substitutionsregel:

$$\int f(x)dx = \int f(g(u)) \cdot g'(u)du$$

mit: x = g(u), du = g‘(u)du bzw.:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du$$

mit: u = g(x), du = g‘(x)dx.

III. Es ist weiter das folgende Grundintegral richtig:

$$\int \frac{1}{x^2 + 1}dx = \arctan(x) \,.$$

IV. Wir führen die partielle Integration durch:

$$\int \ln(x^2 + 4)dx = \int 1 \cdot \ln(x^2 + 4)dx \underset{\left\{\begin{array}{c} u'=1 \Rightarrow u=x \\ v=\ln\left(x^2+4\right) \Rightarrow v'=\frac{2x}{x^2+4} \end{array}\right\}}{=} x \cdot \ln(x^2 + 4) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2 + 4}dx =$$

$$x\cdot\ln(x^2+4)-\int\frac{2x^2}{x^2+4}dx=x\cdot\ln(x^2+4)-\int\frac{2x^2}{x^2+4}dx=(1).$$

Addition und Subtraktion im Zähler des Integranden in (1) ergeben:

$$(1)=x\cdot\ln(x^2+4)-\int\frac{2x^2+8-8}{x^2+4}dx=x\cdot\ln(x^2+4)-\int\left(\frac{2x^2+8}{x^2+4}-\frac{8}{x^2+4}\right)dx=$$

$$x\cdot\ln(x^2+4)-\int\left(\frac{2(x^2+4)}{x^2+4}-\frac{8}{x^2+4}\right)dx=x\cdot\ln(x^2+4)-\int\left(2-\frac{8}{x^2+4}\right)dx=$$

$$x\cdot\ln(x^2+4)-2\int dx+8\int\frac{1}{x^2+4}dx=x\cdot\ln(x^2+4)-2x+8\int\frac{1}{x^2+4}dx=(2).$$

Die Verwendung des Grundintegrals der Arkustangensfunktion erfordert noch die Anwendung der Substitutionsregel (Substitution, Rücksubstitution):

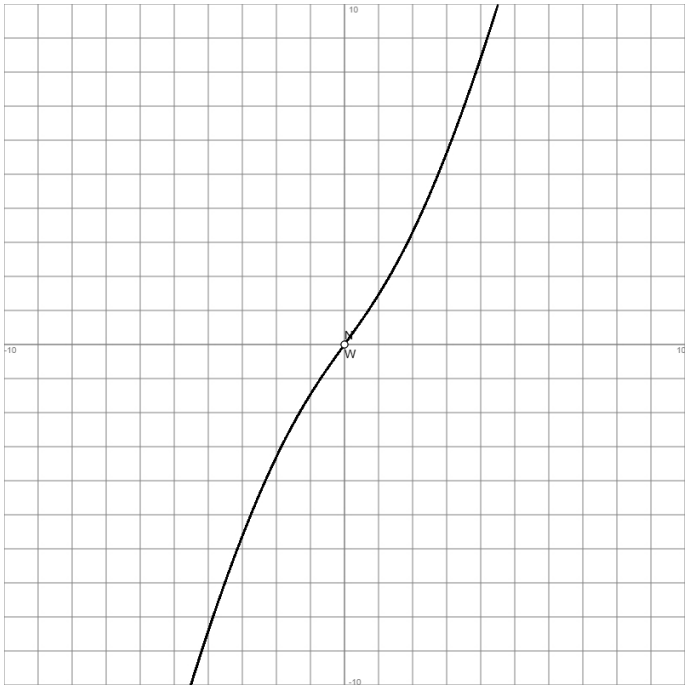
$$(2)=x\cdot\ln(x^2+4)-2x+8\int\frac{1}{x^2+4}dx=x\cdot\ln(x^2+4)-2x+8\int\frac{1}{4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)}dx=$$

$$x\cdot\ln(x^2+4)-2x+2\int\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx\underset{\left\{u=\frac{x}{2}\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{2}\Rightarrow dx=2du\right\}}{=}x\cdot\ln(x^2+4)-2x+2\int\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx=$$

$$x\cdot\ln(x^2+4)-2x+2\int\frac{1}{u^2+1}\cdot 2du=x\cdot\ln(x^2+4)-2x+4\int\frac{1}{u^2+1}du=$$

$$x\cdot\ln(x^2+4)-2x+4\arctan(u)\underset{\left\{u=\frac{x}{2}\right\}}{=}x\cdot\ln(x^2+4)-2x+4\arctan\left(\frac{x}{2}\right).$$

Eine <u>Stammfunktion</u> ist damit: $F(x)=\int\ln(x^2+4)dx=x\cdot\ln(x^2+4)-2x+4\arctan\left(\frac{x}{2}\right)$.



www.michael-buhlmann.de / 09.2025 / Aufgabe 2497