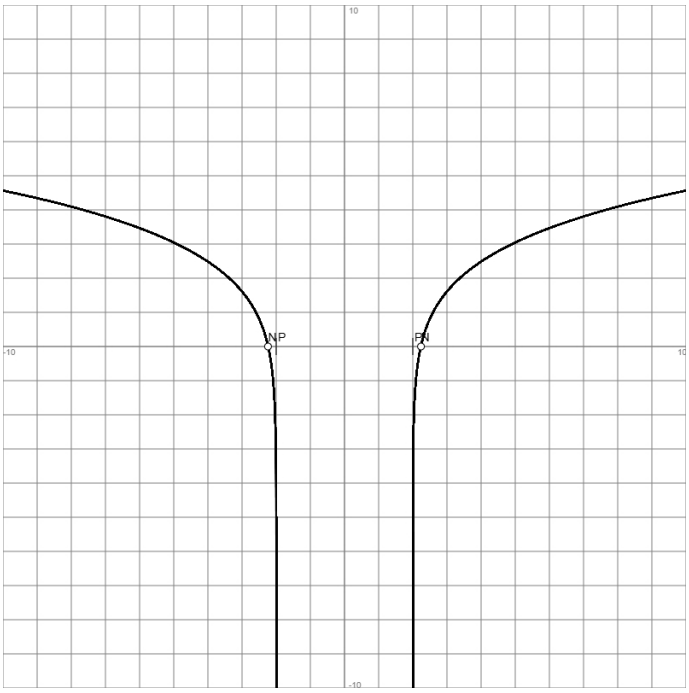
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Stammfunktion

Aufgabe: Gesucht ist eine Stammfunktion von $f(x) = \ln(x^2 - 4)$.



Lösung: I. Es gelten die Logarithmengesetze, u.a.:

$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$, $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$, x, y > 0.

II. Zur Berechnung einer Stammfunktion verwenden wir das Grundintegral:

$\int \ln|x| dx = x \ln|x| - x$,

oder auf Grund der Substitutionsregel für das Integrieren allgemein:

$$\int \ln|x+a| dx \underset{\{u=x+a \Rightarrow du=dx\}}{=} \int \ln|u| du = u \ln|u| - u \underset{\{u=x+a\}}{=} (x+a)\ln|x+a| - (x+a) =$$

$$x \ln|x+a| - x + a \ln|x+a| - a.$$

III. Wir führen unter Verwendung der 3. binomischen Formel und der Logarithmengesetze die Integration durch:

$$\int \ln(x^2 - 4) dx = \int \ln((x+2)(x-2)) dx = \int \left(\ln|x+2| + \ln|x-2|\right) dx = \int \ln|x+2| dx + \int \ln|x-2| dx =$$

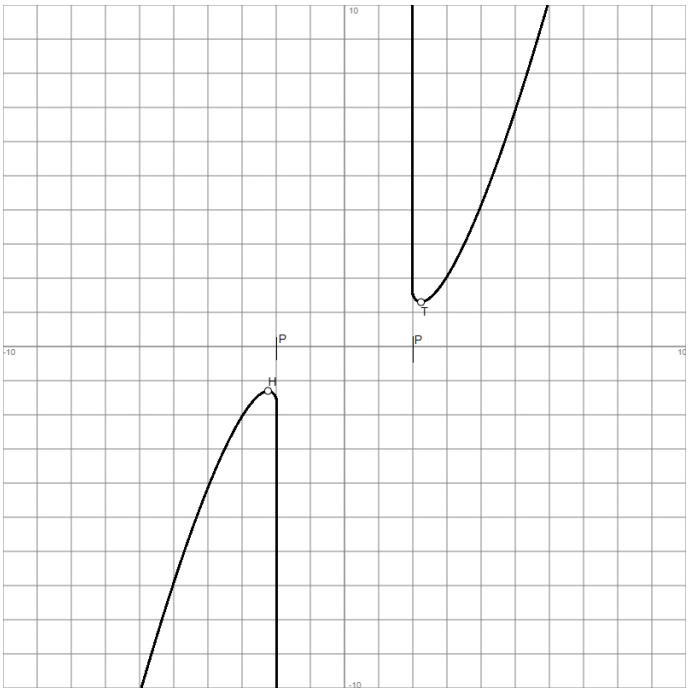
$$(x+2)\ln|x+2| - (x+2) + (x-2)\ln|x-2| - (x-2) =$$

$$x \ln|x+2| - x + 2\ln|x+2| - 2 + x \ln|x-2| - x - 2\ln|x-2| + 2 =$$

$$x \ln|x+2| + 2\ln|x+2| + x \ln|x-2| - 2\ln|x-2| - 2x =$$

$$x\ln|x+2|+x\ln|x-2|+2\ln|x+2|-2\ln|x-2|-2x=$$
$$x\left(\ln|x+2|+\ln|x+1|\right)+2\left(\ln|x+2|-\ln|x-2|\right)-2x=$$
$$x\ln((x+2)(x-2))+2\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)-2x=x\ln\left(x^2-4\right)+2\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)-2x.$$

Eine Stammfunktion ist damit: $F(x)=\int \ln(x^2-4)dx=x\ln\left(x^2-4\right)+2\ln\left(\frac{x+2}{x-2}\right)-2x$.



www.michael-buhlmann.de / 09.2025 / Aufgabe 2498