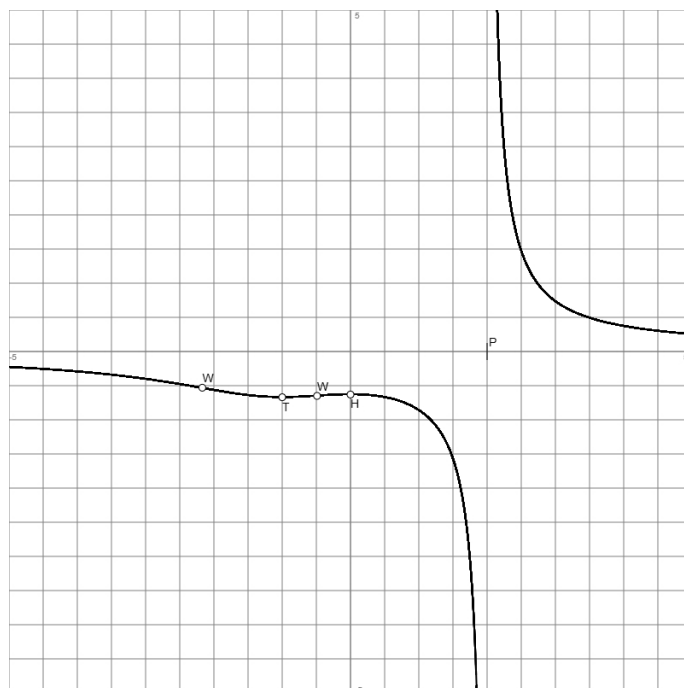


Mathematikaufgaben

> Analysis

> Stammfunktion

Aufgabe: Gesucht ist eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^3 - 8}$.



Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals verwenden wir die Methode der Partialbruchzerlegung des gebrochen rationalen Integranden $f(x)$, d.h. die Zerlegung des Bruches gemäß:

$$f(x) = \frac{c_m x^m + \dots + c_0}{a(x - x_1)^n \cdot \dots \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^o \cdot \dots} = \frac{1}{a} \left[\frac{A_1}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{n_1}}{(x - x_1)^{n_1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \dots + \frac{B_{o_1} x + C_{o_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{o_1}} + \dots \right] (*),$$

wenn nur das Nennerpolynom in lineare und quadratische Faktoren zerlegt ist und das Zählerpolynom einen kleineren Grad als das Nennerpolynom besitzt. Mit den zu bestimmenden reellen Zahlen $A_1, \dots$ ergibt sich dann die Summe von einfachen Brüchen auf der rechten Seite der Gleichung (*). Diese aus der Partialbruchzerlegung entstehenden einzelnen Integrale werden u.a. gelöst nach der Potenzregel:

$$\int \frac{1}{x - a} dx = \ln|x - a|, \quad \int \frac{1}{(x - a)^n} dx = -\frac{1}{(n - 1)(x - a)^{n-1}} \quad (n > 1),$$

schließlich nach Regeln für quadratische Faktoren, u.a.:

$$\int \frac{2x + b}{x^2 + bx + c} dx = \ln(x^2 + bx + c) \quad (\text{gemäß der Substitutionsregel}),$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x \text{ (als Grundintegral).}$$

II. Der Zähler im Integranden $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^3 - 8}$ kann nicht faktorisiert werden, sehr wohl aber der

Nenner vermöge:

$$x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$$

und der (z.B. aus der Polynomdivision) folgenden Zerlegung:

$$x^3 - 8 = (x-2)(x^2 + 2x + 4).$$

III. Für die Partialbruchzerlegung ergibt sich damit der Ansatz:

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^3 - 8} = \frac{x^2 + 5}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 4} \quad (**).$$

Multiplikation von (**) mit dem Nenner $(x-2)(x^2 + 2x + 4)$ des Integranden ergibt:

$$x^2 + 5 = A(x^2 + 2x + 4) + (Bx + C)(x-2) = Ax^2 + 2Ax + 4A + Bx^2 - 2Bx + Cx - 2C = (A+B)x^2 + (2A-2B+C)x + 4A - 2C \quad (**).$$

Die Beziehung (**) liefert auf Grund von

$$(A+B)x^2 + (2A-2B+C)x + 4A - 2C = 1x^2 + 0x + 5$$

mit Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem:

$$A+B = 1$$

$$2A-2B+C = 0$$

$$4A-2C = 5.$$

Wir lösen nach dem Gauß-Algorithmus:

Lineares Gleichungssystem:

$$+ 1A + 1B = 1$$

$$+ 2A - 2B + 1C = 0$$

$$+ 4A - 2C = 5$$

Anfangstableau:

$$1 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 1$$

$$2 \quad -2 \quad 1 \quad | \quad 0$$

$$4 \quad 0 \quad -2 \quad | \quad 5$$

1. Schritt: $1 \cdot (2) - 2 \cdot (1) / 1 \cdot (3) - 4 \cdot (1) /$

$$1 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 1$$

$$0 \quad -4 \quad 1 \quad | \quad -2$$

$$0 \quad -4 \quad -2 \quad | \quad 1$$

2. Schritt: $-1 \cdot (3) + 1 \cdot (2) /$

$$1 \quad 1 \quad 0 \quad | \quad 1$$

$$0 \quad -4 \quad 1 \quad | \quad -2$$

$$0 \quad 0 \quad 3 \quad | \quad -3$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$+ 1A + 1B = 1$$

$$- 4B + 1C = -2$$

$$+ 3C = -3$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$$C = -1$$

$$B = 0.25$$

$$A = 0.75$$

Die Identität (**) wird damit zu:

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^3 - 8} = \frac{x^2 + 5}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{0,75}{x-2} + \frac{0,25x-1}{x^2 + 2x + 4}.$$

IV. Integration ergibt:

$$F(x) = \int \frac{x^2 + 5}{x^3 - 8} dx = \int \frac{x^2 + 5}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} dx = \int \frac{0,75}{x-2} dx + \int \frac{0,25x-1}{x^2 + 2x + 4} dx = (1) + (2)$$

mit:

$$(1) = \int \frac{0,75}{x-2} dx = 0,75 \cdot \ln|x-2| = \frac{3}{4} \ln|x-2|$$

$$(2) = \int \frac{0,25x-1}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{1}{8} \int \frac{2x-8}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{1}{8} \int \frac{2x+2-10}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{1}{8} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 4} dx + \frac{1}{8} \int \frac{-10}{x^2 + 2x + 4} dx =$$

$$\frac{1}{8} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 4} dx - \frac{5}{4} \int \frac{1}{x^2 + 2x + 4} dx = \frac{1}{8} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 4} dx - \frac{5}{4} \int \frac{1}{(x+1)^2 + 3} dx =$$

$$\frac{1}{8} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 4} dx - \frac{5}{12} \int \frac{1}{\frac{(x+1)^2}{3} + 1} dx = \frac{1}{8} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 4} dx - \frac{5}{12} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx \quad \left\{ u = \frac{x+1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow dx = \sqrt{3} du \right\}$$

$$\frac{1}{8} \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 4} dx - \frac{5}{12} \int \frac{\sqrt{3}}{u^2 + 1} du = \frac{1}{8} \ln(x^2 + 2x + 4) - \frac{5\sqrt{3}}{12} \arctan(u) \quad \left\{ u = \frac{x+1}{\sqrt{3}} \right\}$$

$$\frac{1}{8} \ln(x^2 + 2x + 4) - \frac{5\sqrt{3}}{12} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

Eine Stammfunktion ist damit:

$$F(x) = \int \frac{x^2 + 5}{x^3 - 8} dx = \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{8} \ln(x^2 + 2x + 4) - \frac{5\sqrt{3}}{12} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

