

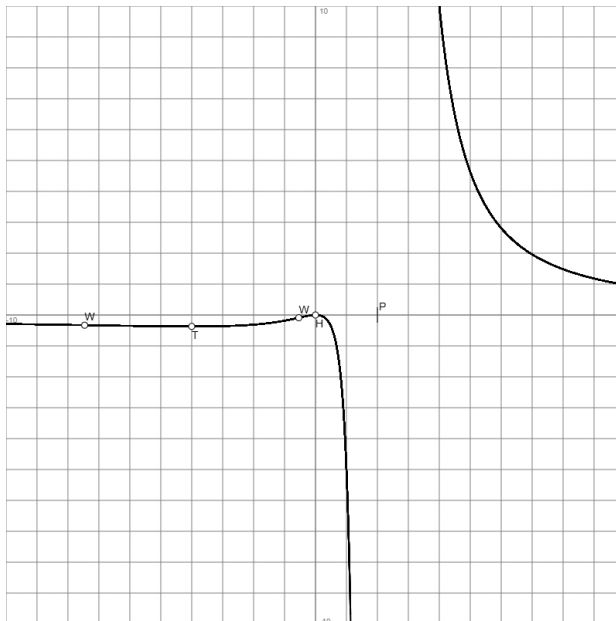
Mathematikaufgaben

> Analysis

> Stammfunktion

Aufgabe: Gesucht ist eine Stammfunktion von

$$f(x) = \frac{5x^2}{(x-2)^3}.$$



Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals verwenden wir die Methode der Partialbruchzerlegung des gebrochen rationalen Integranden $f(x)$, d.h. die Zerlegung des Bruches gemäß:

$$f(x) = \frac{c_m x^m + \dots + c_0}{a(x-x_1)^n \cdot \dots \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{o_1} \cdot \dots} = \frac{1}{a} \left[\frac{A_1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{n_1}}{(x-x_1)^{n_1}} + \dots + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \dots + \frac{B_{o_1} x + C_{o_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{o_1}} + \dots \right] (*),$$

wenn nur das Nennerpolynom in lineare und quadratische Faktoren zerlegt ist und das Zählerpolynom einen kleineren Grad als das Nennerpolynom besitzt. Mit den zu bestimmenden reellen Zahlen $A_1, \dots$ ergibt sich dann die Summe von einfachen Brüchen auf der rechten Seite der Gleichung (*). Diese aus der Partialbruchzerlegung entstehenden einzelnen Integrale werden u.a. gelöst nach der Potenzregel:

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a|, \quad \int \frac{1}{(x-a)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} \quad (n > 1),$$

schließlich nach Regeln für quadratische Faktoren, u.a.:

$$\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c} dx = \ln(x^2+bx+c) \quad (\text{gemäß der Substitutionsregel}),$$

$$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x \quad (\text{als Grundintegral}).$$

II. Zähler und Nenner im Integranden $f(x) = \frac{5x^2}{(x-2)^3}$ liegen faktorisiert vor. Für die Partialbruchzerlegung ergibt sich damit der Ansatz:

$$f(x) = \frac{5x^2}{(x-2)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} \quad (**).$$

Multiplikation von (**) mit dem Nenner $(x-2)^3$ des Integranden ergibt:

$$5x^2 = A(x-2)^2 + B(x-2) + C = A(x^2-4x+4) + B(x-2) + C = Ax^2 + (-4A+B)x + 4A - 2B + C (***)$$

Die Beziehung (**) liefert auf Grund von

$$Ax^2 + (-4A + B)x + 4A - 2B + C = 5x^2 + 0x + 0$$

mit Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem:

$$A = 5$$

$$-4A + B = 0$$

$$4A - 2B + C = 0.$$

Wir lösen auf:

$$A = 5 \Rightarrow -4 \cdot 5 + B = 0 \Rightarrow -20 + B = 0 \Rightarrow B = 20$$

$$A = 5, B = 20 \Rightarrow 4 \cdot 5 - 2 \cdot 20 + C = 0 \Rightarrow -20 + C = 0 \Rightarrow C = 20$$

Die Identität (**) wird damit zu:

$$f(x) = \frac{5x^2}{(x-2)^3} = \frac{5}{x-2} + \frac{20}{(x-2)^2} + \frac{20}{(x-2)^3}.$$

III. Integration ergibt:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{5x^2}{(x-2)^3} dx = \int \left(\frac{5}{x-2} + \frac{20}{(x-2)^2} + \frac{20}{(x-2)^3} \right) dx = \\ &= \int \frac{5}{x-2} dx + \int \frac{20}{(x-2)^2} dx + \int \frac{20}{(x-2)^3} dx = 5 \ln|x-2| - \frac{20}{x-2} - \frac{20}{2(x-2)^2} = \\ &= 5 \ln|x-2| - \frac{20}{x-2} - \frac{10}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion ist damit:

$$F(x) = \int \frac{5x^2}{(x-2)^3} dx = 5 \ln|x-2| - \frac{20}{x-2} - \frac{10}{(x-2)^2}.$$

