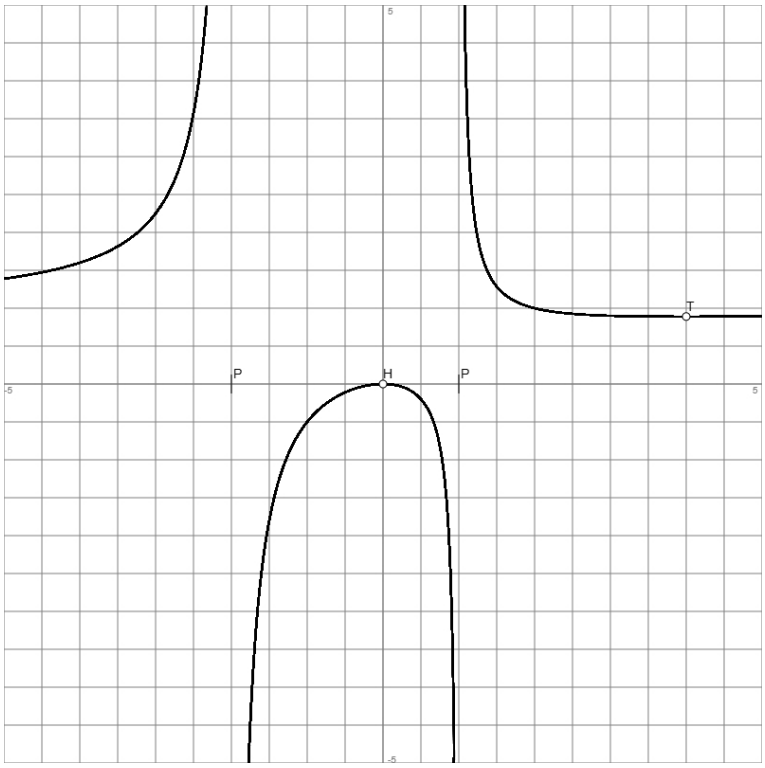
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Stammfunktion

Aufgabe: Gesucht ist eine Stammfunktion von $f(x)=\frac{x^2}{(x-1)(x+2)}$.



Lösung: I. Zur Berechnung des unbestimmten Integrals verwenden wir die Methode der Partialbruchzerlegung des gebrochen rationalen Integranden f(x), d.h. die Zerlegung des Bruches gemäß:

$$f(x)=\frac{c_m x^m+\ldots+c_0}{a(x-x_1)^n\cdot\ldots\cdot(x^2+p_1x+q_1)^o\cdot\ldots}=$$

$$\frac{1}{a}\left[\frac{A_1}{x-x_1}+\ldots+\frac{A_{n_1}}{(x-x_1)^{n_1}}+\ldots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{B_{o_1}x+C_{o_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{o_1}}+\ldots\right] \quad (*),$$

wenn nur das Nennerpolynom in lineare und quadratische Faktoren zerlegt ist und das Zählerpolynom einen kleineren Grad als das Nennerpolynom besitzt. Mit den zu bestimmenden reellen Zahlen A_1, … ergibt sich dann die Summe von einfachen Brüchen auf der rechten Seite der Gleichung (*). Diese aus der Partialbruchzerlegung entstehenden einzelnen Integrale werden u.a. gelöst nach der Potenzregel:

$$\int\frac{1}{x-a}dx=\ln|x-a|,\ \int\frac{1}{(x-a)^n}dx=-\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}}\ \ (n>1),$$

schließlich nach Regeln für quadratische Faktoren, u.a.:

$\int \frac{2x+b}{x^2+bx+c}\,dx = \ln(x^2+bx+c)$ (gemäß der Substitutionsregel),

$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$ (als Grundintegral).

II. Im Integranden $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x+2)}$ ist der Grad des Zählerpolynoms $y = x^2$ gleich dem des Nennerpolynoms $y = (x-1)(x+2) = x^2+x-2$, so dass nach I. zuerst eine Polynomdivison durchzuführen ist. Es gilt:

$x^2 : (x^2+x-2) = 1 + \frac{-x+2}{x^2+x-2} = 1 + \frac{-x+2}{(x-1)(x+2)}$

$\underline{-(x^2+x-2)}$

$-x+2$

III. Zähler und Nenner im Bruch $y = \frac{-x+2}{(x-1)(x+2)}$ liegen faktorisiert vor. Für die Partialbruchzerlegung ergibt sich damit der Ansatz:

$y = \frac{-x+2}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ (**).

Multiplikation von (**) mit dem Nenner $(x-1)(x+2)$ ergibt:

$-x+2 = A(x+2) + B(x-1)$ (***).

Die Beziehung (***) liefert durch das Einsetzen bestimmter x-Werte:

$x = 1$: $-1+2 = A(1+2) + B\cdot 0 \Leftrightarrow 1 = 3A \Leftrightarrow A = 1/3$

$x = -2$: $-(-2)+2 = A\cdot 0 + B(-2-1) \Leftrightarrow 4 = -3B \Leftrightarrow B = -4/3$

Die Identität (***) wird damit zu:

$$y = \frac{-x+2}{(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{4}{3}}{x+2} = \frac{1}{3(x-1)} - \frac{4}{3(x+2)}.$$

IV. Integration ergibt:

$$F(x) = \int \frac{x^2}{(x-1)(x+2)}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{3(x-1)} - \frac{4}{3(x+2)}\right)dx =$$

$$\int 1\,dx + \int \frac{1}{3(x-1)}\,dx - \int \frac{4}{3(x+2)}\,dx = x + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{4}{3}\ln|x+2|.$$

Eine Stammfunktion ist damit:

$$F(x) = \int \frac{x^2}{(x-1)(x+2)}\,dx = x + \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{4}{3}\ln|x+2|.$$

www.michael-buhlmann.de / 09.2025 / Aufgabe 2505