**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Folgen, Reihen
## > Summenformel

---

**Aufgabe**: Zeige, dass die folgende Summenformel (angeblich des kleinen Carl Friedrich Gauß?) für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

**1. Lösung** (mit vollständiger Induktion): I. Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen $n\varepsilon\mathbf{N}$ die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein $n=k_0\,\varepsilon\mathbf{N}$ (meist n=0 oder n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;
3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;
4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen $n\varepsilon\mathbf{N}$.

II. Induktionsbeweis der Summenformel:

<u>Behauptung</u>: $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

<u>Beweis</u>:

1) *Induktionsanfang*: n=1 mit: $1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1$ als wahre Aussage.

2) *Induktionsannahme* für n=k: $1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$, angenommen als wahre Aussage (*).

3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, als wahr zu beweisen.

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: Wir formen die Induktionsbehauptung unter Benutzung der Induktionsannahme (*) äquivalent zu einer wahren Aussage um und beweisen damit den Induktionsschritt. Es gilt:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\overset{(*)}{\Leftrightarrow}\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\overset{\bullet 2}{\Leftrightarrow}$$
$$k(k+1)+2(k+1)=(k+1)(k+2)\Leftrightarrow k^2+k+2k+2=k^2+2k+k+2\Leftrightarrow 0=0,$$

Letzteres ist offensichtlich eine wahre Aussage.

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=1, sondern auch für n=2, weiter für n=3 usw., mithin für alle $n\varepsilon\mathbf{N}$.

**2. Lösung** (mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems): 1) Es gilt der folgende *Ansatz*:

$1+2+3+...+n=a_2n^2+a_1n$ (*),

so dass die Zahlen $a_1$, $a_2$ zu bestimmen sind.

2) Für n = 1 und n=2 ergeben sich aus dem Ansatz (*) die zwei Gleichungen und damit das *lineare Gleichungssystem*:

$1 = a_2 + a_1$
$3 = 4a_2 + 2a_1$
3) Die *Lösung des linearen Gleichungssystems* erhalten wir aus:

Lineares Gleichungssystem:

$+ \; 1a_2 \; + \; 1a_1 \; = \; 1$

$+ \; 4a_2 \; + \; 2a_1 \; = \; 3$

Anfangstableau:

1 1 | 1

4 2 | 3

1. Schritt: 1*(*2*) - 4*(*1*) /

1 1 | 1

0 -2 | -1

2. Schritt: 2*(*1*) + 1*(*2*) /

2 0 | 1

0 -2 | -1

Teilen: (*1*):2 / (*2*):(-2) /

1 0 | 1/2

0 1 | 1/2

Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems:

$+ \; 1a_2 \; = \; 1/2$

$+ \; 1a_1 \; = \; 1/2$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$a_2 = 1/2$
$a_1 = 1/2$

4) Mit $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/2$, eingesetzt in Ansatz (*), gilt also die *Formel*:

$$1+2+3+...+n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(n^2+n) = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

wobei Termumformungen (wie Ausklammern) zur gewünschten Darstellung führen.

www.michael-buhlmann.de / 09.2014 / Aufgabe 46