Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Folgen, Reihen
> Summenformel

Aufgabe: Zeige, dass die folgende Summenformel über die ersten n Quadratzahlen natürlicher Zahlen gilt:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

1. Lösung (mit vollständiger Induktion): I. Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen $n \varepsilon \mathbf{N}$ die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein $n=k_0 \varepsilon \mathbf{N}$ (meist n=0 oder n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;
3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;
4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \varepsilon \mathbf{N}$.

II. Induktionsbeweis der Summenformel:

Behauptung: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Beweis:

1) *Induktionsanfang*: n=1 mit: $1 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1+1)}{6} = 1$ als wahre Aussage.

2) *Induktionsannahme* für n=k: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, angenommen als wahre Aussage (*).

3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (k+1)^2 = \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$, als wahr zu beweisen (Einsetzen von k+1 statt n in die Summenformel $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ergibt: $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$).

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: Wir weisen die Induktionsbehauptung unter Benutzung der Induktionsannahme (*) nach und beweisen damit die Gültigkeit des Induktionsschritts. Es gilt:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \underset{(*)}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} =$$

$$\frac{k(2k^2 + k + 2k + 1) + 6(k^2 + 2k + 1)}{6} = \frac{2k^3 + 3k^2 + k + 6k^2 + 12k + 6}{6} =$$

$$\frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6} \underset{(**)}{=} \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Die Gleichheit (**) gilt dabei auf Grund der Identität:

$$(k+1)(k+2)(2k+3) = (k^2+2k+k+2)(2k+3) = (k^2+3k+2)(2k+3) =$$

$$2k^3+3k^2+6k^2+9k+4k+6 = 2k^3+9k^2+13k+6.$$

Damit ist die Induktionsbehauptung nachgewiesen.

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=1, sondern auch für n=2, weiter für n=3 usw., mithin für alle nε**N**.

2. Lösung (mit vollständiger Induktion): I. Allgemein gilt für das Beweisverfahren der vollständigen Induktion für Aussagen über die natürlichen Zahlen nε**N** die folgende Vorgehensweise:

1) Induktionsanfang der Gültigkeit der Aussage für ein n=k_0 ε**N** (meist n=0 oder n=1);
2) Induktionsannahme der Gültigkeit der Aussage für n=k;
3) Induktionsbehauptung der Gültigkeit der Aussage für n=k+1;
4) Induktionsschritt von n=k auf n=k+1, d.h.: Beweis der Induktionsbehauptung unter Verwendung der Induktionsannahme;
5) Induktionsende auf Grund von Induktionsanfang und -schritt, d.h. letztlich: Gültigkeit der Aussage für alle natürlichen Zahlen nε**N**.

II. Induktionsbeweis der Summenformel:

<u>Behauptung</u>: $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

<u>Beweis</u>:

1) *Induktionsanfang*: n=1 mit: $1 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = 1$ als wahre Aussage.

2) *Induktionsannahme* für n=k: $1^2+2^2+3^2+...+k^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, angenommen als wahre Aussage (*).

3) *Induktionsbehauptung* für n=k+1: $1^2+2^2+3^2+...+(k+1)^2 = \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$, als wahr zu beweisen (Einsetzen von k+1 statt n in die Summenformel $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ergibt: $\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$).

4) *Induktionsschritt* von n=k auf n=k+1: Wir weisen die Induktionsbehauptung unter Benutzung der Induktionsannahme (*) nach und beweisen damit die Gültigkeit des Induktionsschritts. Es gilt unter Verwendung von zielführenden Termumformungen:

$$\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} = \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6} = \frac{2k^3+3k^2+k+6k^2+12k+6}{6} =$$

$$\frac{(2k^3+3k^2+k)+(6k^2+12k+6)}{6} = \frac{k(2k^2+3k+1)+6(k^2+2k+1)}{6} =$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{6(k+1)^2}{6} =$$

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \underset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \sum_{i=1}^{k+1} i^2.$$

Damit ist die Induktionsbehauptung nachgewiesen.

5) *Beweisende*: Wegen des Induktionsanfangs gilt auf Grund des Induktionsschritts die zu beweisende Aussage nicht nur für n=1, sondern auch für n=2, weiter für n=3 usw., mithin für alle $n \in \mathbf{N}$.

3. Lösung (mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems): 1) Es gilt der folgende *Ansatz* (Faulhabersche Formel):

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = a_3 n^3 + a_2 n^2 + a_1 n \quad (*)$$

mit den zu bestimmenden Koeffizienten a_3, a_2, a_1.

2) Für n = 1, n=2 und n = 3 ergeben sich aus dem Ansatz (*) die drei Gleichungen und damit das *lineare Gleichungssystem*:

$+ \ 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 = \ 1$

$+ \ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = \ 5$

$+ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 = 14$

3) Die *Lösung des linearen Gleichungssystems* erhalten wir aus:

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$+ \ 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 = \ 1$

$+ \ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = \ 5$

$+ 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 = 14$

<u>Anfangstableau</u>:

1 1 1 | 1
8 4 2 | 5
27 9 3 | 14

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) - 8*(*1*) / 1*(*3*) - 27*(*1*) /

1 1 1 | 1
0 -4 -6 | -3
0 -18 -24 | -13

<u>2. Schritt</u>: 4*(*1*) + 1*(*2*) / -2*(*3*) + 9*(*2*) /

4 0 -2 | 1
0 -4 -6 | -3
0 0 -6 | -1

<u>3. Schritt</u>: -3*(*1*) + 1*(*3*) / -1*(*2*) + 1*(*3*) /

-12 0 0 | -4
0 4 0 | 2
0 0 -6 | -1

<u>Teilen</u>: (*1*):(-12) / (*2*):4 / (*3*):(-6) /

1 0 0 | 1/3
0 1 0 | 1/2
0 0 1 | 1/6

<u>Diagonalgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$+ 1a_3 = 1/3$

$+ 1a_2 = 1/2$

$+ 1a_1 = 1/6$

<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

$a_3 = 1/3$
$a_2 = 1/2$
$a_1 = 1/6$

4) Mit $a_1 = 1/6$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$ eingesetzt in Ansatz (*), gilt also die *Formel*:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \quad (**).$$

Wir formen das Polynom in (**) noch um:

$$\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{2}{6}n^3 + \frac{3}{6}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6} \underset{(***)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Beziehung (***) ergibt sich dabei aus:

$2n^2+3n+1 = 0 \Leftrightarrow n_{1.2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-3 \pm 1}{4} \Leftrightarrow n_1 = -1,\ n_2 = -0{,}5$,

woraus wiederum die Linearfaktorzerlegung des Polynoms

$2n^2+3n+1 = 2(n+1)(n+0{,}5) = (n+1))2n+1)$

folgt. Wir erhalten also die Behauptung über die Summenformel der ersten n Quadratzahlen:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

www.michael-buhlmann.de / 11.2020 / Aufgabe 1156